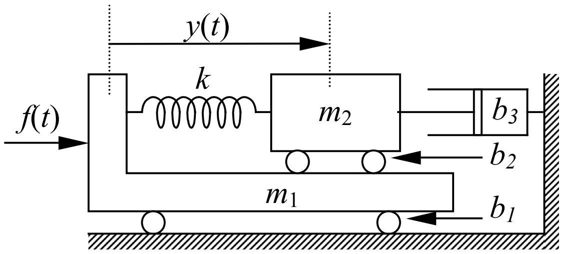
Instituto Nacional de Pesquisas Espacias - ETE
Mecânica Espacial e Controle
Teoria de Controle – CMC-201-4

Prof. Valdemir Carrara

1ª Série de exercícios

1) Pede-se obter a equação diferencial do sistema abaixo na forma de espaço de estados. Consideram-se as variáveis indicadas na figura, na qual b_1 e b_2 são os coeficientes de atrito nas rodas. A entrada do sistema é a força $f(t)$ e a saída é $y(t)$, que representa a diferença na posição das duas massas.



a) Admitindo que os valores dos parâmetros sejam: $k = 5$, $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_3 = 0{,}5$, $m_1 = 1$ e $m_2 = 0{,}5$, pede-se examinar a controlabilidade do sistema.

2) Considerar o sistema mecânico mostrado na figura 1, cujo análogo elétrico é apresentado a seguir, na figura 2. Ver as observações ao final das questões, e responder as questões abaixo.

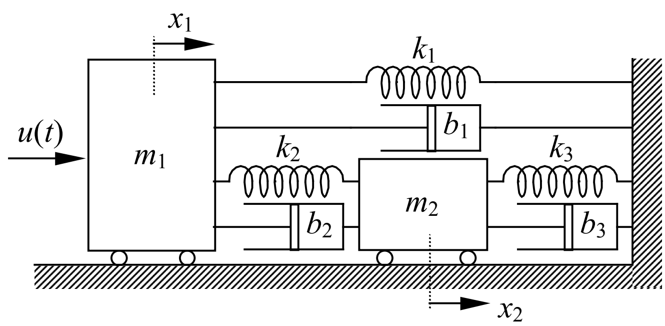


Fig. 1 – Sistema mecânico

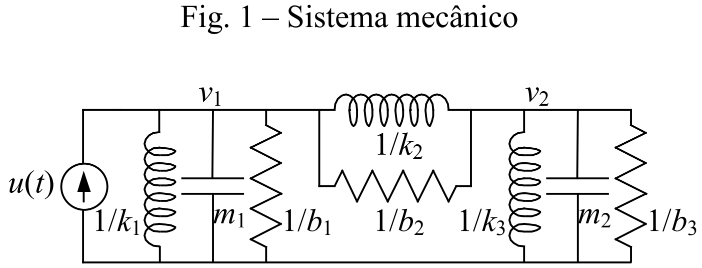


Fig. 2 – Sistema equivalente elétrico

a) Mostrar que este sistema é representado pelo conjunto de equações diferenciais lineares a coeficientes constantes

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$$

onde as matrizes A e B valem

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -(k_1+k_2)/m_1 & k_2/m_1 & -(b_1+b_2)/m_1 & b_2/m_1 \\ k_2/m_2 & -(k_2+k_3)/m_2 & b_2/m_2 & -(b_2+b_3)/m_2 \end{pmatrix},\; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/m_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

considerando também que $\dot{x}_1 = x_3$, $\dot{x}_2 = x_4$ e $x(t) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}^T$, onde x_1 e x_2 são os deslocamentos das massas m_1 e m_2, respectivamente, no sistema mecânico, ou então que $x_3 = \dot{x}_1 = v_1$, $x_4 = \dot{x}_2 = v_2$ e $x(t) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}^T$, onde v_1 e v_2 são as tensões nos capacitores m_1 e m_2, respectivamente, no sistema equivalente elétrico.

b) Mostrar que o sistema é totalmente controlável quando m_1 = 1 kg, m_2 = 0.5 kg, $k_1 = k_2 = k_3$ = 2 N/m, e $b_1 = b_2 = b_3$ = 1 Ns/m

c) Mostrar que o sistema não é totalmente controlável se o amortecedor b_1 e as molas k_2 e k_3 forem retiradas, isto é, se $b_1 = k_2 = k_3 = 0$, mantidos os demais parâmetros iguais aos do item *b*.

d) Obter uma das formas canônicas da controlabilidade na configuração anterior (questão *c*). Qual é a correspondência entre as variáveis transformadas com relação às variáveis de estado do sistema original? Este sistema é estabilizável?

e) Obter os autovalores e autovetores que geram o sub-espaço controlável e o sub-espaço não controlável.

f) Considerar que o vetor de resposta das variáveis de saída, $y(t)$, seja dado por

$$y(t) = C\,x(t),$$

onde a matriz C vale

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mostrar então que este sistema é totalmente reconstrutível assumindo-se que os valores das massas, amortecedores e molas sejam iguais aos do item *c*.

g) Considerar agora que a matriz de resposta das variáveis de saída seja dada por

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ou seja, observa-se somente a posição da primeira massa. Mostrar que este sistema não é totalmente reconstrutível (usar os valores da questão anterior). Obter então a forma canônica da reconstrutibilidade. Quais são as variáveis transformadas não reconstrutíveis? Este sistema é detectável?

h) Obter os autovalores e autovetores que geram o sub-espaço reconstrutível e o sub-espaço não reconstrutível.

i) Efetuar uma transformação canônica para variáveis de fase, considerando o sistema totalmente controlável da questão *b*, porém com $b_1 = 0$.

Obs:

a) Exceto a questão *a*, todas as outras questões podem ser respondidas em Matlab / Octave / Scilab / Freemat. As seguintes funções podem ser utilizadas:

```
rank, inv, poly, fliplr
```

b) Data de entrega: