Equações dinâmicas da atitude com controle por rodas de reação, torque externo, painéis giratórios e amortecimento de nutação passivo

Valdemir Carrara

Rodas de reação

Um satélite provido de uma roda de reação não se comporta como um corpo rígido, mas sim como dois corpos unidos por um vínculo (o eixo de rotação) e uma ação (o torque de controle). A equação do corpo rígido aplicado a este sistema fornece (Wertz, 1978):

$$I\,\dot{\omega} = (I\,\omega + h) \times \omega - \dot{h} + N\,,$$

ou

$$\dot{\omega} = I^{-1}\left[-\Omega(\omega)\,(I\,\omega + h) - \dot{h} + N\right].$$

onde o momento de inércia I inclui a massa de todas as rodas girando com a mesma velocidade angular do satélite, ou seja, é o momento angular do satélite considerando as rodas paradas em relação a ele, h é o momento angular total armazenado nas rodas, com relação ao corpo do satélite, e N é a resultante das forças externas (perturbações e controle). Nota-se que $\dot{h}$ representa o torque líquido aplicado pelo sistema de controle às rodas (diferença entre o torque total e o torque de atrito). Num sistema composto por m rodas de reação, onde o versor unitário da direção do eixo de rotação da roda i (i = 1, ..., m), expresso no sistema geométrico do satélite, é dado por n_i, o momento angular das rodas fica:

$$h = \sum_{i=1}^{m} h_i\, n_i$$

onde o escalar h_i é o momento angular da roda i. Analogamente, a variação do momento angular das rodas é dada por:

$$\dot{h} = \sum_{i=1}^{m} T_i\, n_i$$

onde T_i é o torque líquido aplicado à roda. O momento angular da roda deve igualmente ser integrado por meio das equações:

$$\dot{h}_i = T_i$$

Gera-se com isso um sistema de 3 + m equações diferenciais. Caso seja necessário obter a velocidade angular de cada roda, emprega-se:

$$u_i = \frac{h_i}{I_i}\,,$$

onde I_i é o momento de inércia da roda i com relação ao eixo de rotação da roda.

Caso o torque T_i seja constante a partir do instante t_o, então a integração do momento angular de cada roda fornece:

$$h_i(t) = h_i(t_o) + T_i\ (t - t_o)$$

Painéis giratórios

No entanto, se o satélite não for rígido (possuir apêndices flexíveis ou geometria variável), as equações acima não são mais válidas, e torna-se necessário obter uma nova formulação para este caso, o que pode ser bastante complexo em virtude da geometria do satélite. Neste trabalho, será feita a suposição de que o satélite é formado por diversas estruturas rígidas unidas por juntas articuladas com um corpo principal, ou seja, um corpo com geometria variável.

Considere-se então um corpo unido a outro através de uma junta de articulação, conforme a Figura 1. Normalmente, a velocidade das articulações é conhecida pois existe um modelo de atuador que fornece a posição $\theta(t)$, sua velocidade ou mesmo o torque na junta. Por exemplo, suponha um satélite com apontamento geocêntrico (que possua uma face sempre voltada para a Terra) e que tenha um painel solar que acompanhe a direção do Sol conforme o satélite movimenta-se em sua órbita. Neste caso, a velocidade angular do painel com relação ao satélite é aproximadamente igual à velocidade angular orbital do satélite, porém em sentido contrário. Como a velocidade angular orbital é praticamente constante em órbitas de baixa excentricidade, pode-se supor que a velocidade angular do painel $\dot{\theta}(t)$ com relação ao corpo do satélite é também constante. Veja no entanto que esta mesma velocidade angular com relação a um referencial inercial é quase nula.

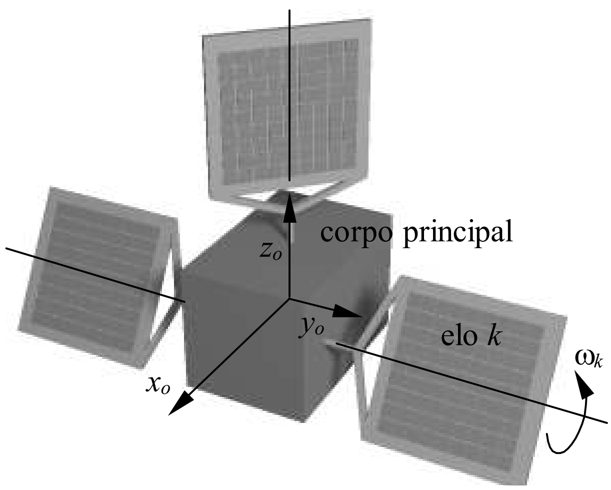


Fig. 1 - Representação das articulações dos apêndices em um satélite.

Para obter a equação da dinâmica do satélite, será suposto aqui que ele é formado por diversos corpos rígidos, denominados elos, articulados com relação ao corpo principal do satélite através de juntas rotativas. Em robótica, costuma-se utilizar a notação de Denavit-Hartenberg (Asada e Slotine, 1985), que estabelece regras para se compor os diversos sistemas de coordenadas das juntas. Por esta notação, cada junta recebe um sistema de coordenadas retangulares, cuja orientação dos eixos é realizada de forma a facilitar a transposição das diversas matrizes de rotação que compõem o movimento dos braços. Infelizmente, embora esta sistemática seja eficiente para compor movimentos, ela se revela ineficaz para a composição da dinâmica, por não levar em conta a posição do centro de massa de cada elo. Outra desvantagem desta formulação se deve ao fato de que a base de um braço mecânico absorve a reação aos torques aplicados nas juntas, o que não ocorre num corpo livre no espaço. No satélite torna-se imperativo, portanto, que os sistemas de coordenadas intermediários sejam fixados no centro de massa de cada um dos corpos articulados, assegurando desta forma que possam ser computados o centro de massa e matriz de inércia do conjunto.

Outro fato comum em robótica é o aparecimento de juntas prismáticas (ou telescópicas), onde o deslocamento do braço se faz ao longo do eixo da junta. Embora este tipo de junta seja bastante raro em aplicações espaciais (mesmo nos braços mecânicos espaciais), a formulação obtida aqui pode ser facilmente estendida para acomodar também as juntas prismáticas. Será suposto também que em cada junta unem-se exclusivamente dois corpos (ou elos), sendo um deles chamado elo antecessor da junta e o outro o elo sucessor da junta. No caso estudado aqui, o elo antecessor será sempre o corpo principal do satélite. No entanto, uma formulação mais geral com elos intermediários (simultaneamente antecessores e sucessores) poderá ser obtida, embora com uma dificuldade algébrica considerável. Tal formulação foge, contudo, do objetivo principal deste trabalho, e assim não será analisada aqui.

Os elos que se unem ao corpo do satélite serão numerados seqüencialmente, a partir da unidade. Será admitido que n elos estão unidos ao corpo principal, conforme a Figura 1. Os índices inferiores referem-se ao elo considerado (k para os elos, k = 1, ..., n; o para o corpo principal), exceto no caso de vetores, que empregarão o índice superior para representar o sistema no qual são referenciados. Serão utilizados três sistemas de coordenadas para estabelecer o equacionamento dinâmico, mostrados na Figura 2: o sistema de direções inerciais i, com origem no centro de massa do conjunto (corpo principal mais elos); o sistema do satélite, o, fixo ao corpo principal e com origem em seu centro de massa e um sistema de coordenadas para cada elo, k, k = 1, ..., n, com origem no centro de massa do elo correspondente. Admite-se, além disso, que são conhecidas as massas m_o e m_k, e as matrizes de inércia I_o e I_k do corpo do satélite e dos elos, respectivamente, com relação aos seus sistemas de coordenadas. A posição da junta k deve ser fornecida através dos vetores a_{ok}^o e a_{ko}^k, com relação aos sistemas do satélite e do elo k, respectivamente. Finalmente, tem-se como dada a velocidade angular ω_k^o de cada elo k com relação ao sistema o, segundo a direção da junta rotativa, porém medida e expressa no sistema de coordenadas do corpo do satélite. Novamente, para simplificar a notação, empregou-se somente o índice k, quando, de acordo com a regra empregada no Apêndice A, deveria ser k/o.

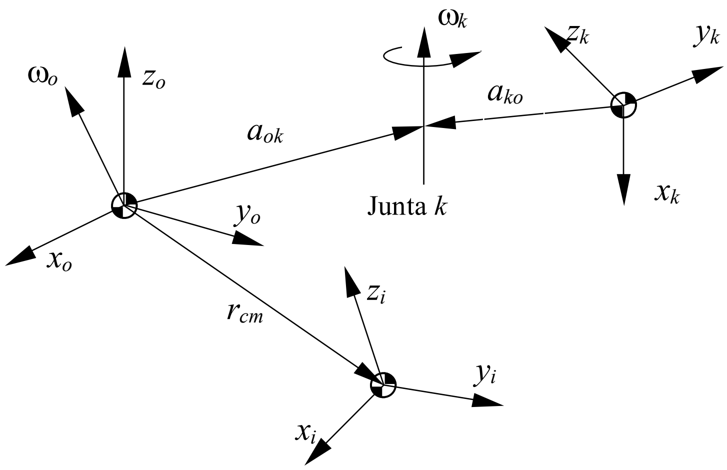


Fig. 2 - Sistemas de coordenadas no satélite com geometria variável.

Em analogia às equações da dinâmica para corpos rígidos, deve-se expressar todos os vetores no sistema do corpo do satélite, sistema este no qual as medidas dos diversos sensores de atitude são referenciadas, e no qual é conhecida a matriz de inércia. Como a origem do sistema de direções inerciais é fixada ao centro de massa r_{cm} do conjunto, necessita-se da posição deste centro com relação ao sistema o a cada instante:

$$r_{cm}^{o} = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \left(a_{ok}^{o} - a_{ko}^{o} \right)$$

onde a massa reduzida de cada elo, μ_k, vale:

$$\mu_k = \frac{m_k}{m_o + \sum_{j=1}^{n} m_j} = \frac{m_k}{m_t}$$

com m_t sendo a massa total do satélite (corpo principal e apêndices).

A derivada do momento angular pode agora ser decomposta nos constituintes do satélite, na forma:

$$\dot{L}^{o} = \int_{V_o} \Omega(r_o^o)\, \ddot{r}_o^o \, dm_o + \sum_{k=1}^{n} \int_{V_k} \Omega(r_k^o)\, \ddot{r}_k^o \, dm_k \ .$$

onde os vetores r_o e r_k representam a posição do elemento de massa dm_o e dm_k, do corpo principal do satélite e do elo k, respectivamente, com relação ao centro de massa do conjunto, e expressos no sistema o. As integrais são efetuadas em todo no volume V_o e V_k do satélite. Se ρ_o^o e ρ_k^o representarem, respectivamente, a posição de um elemento de massa do corpo principal e do apêndice k, com relação ao seu próprio sistema de coordenadas, porém expressas ambas no sistema o, então a posição destes elementos com relação ao centro de massa do conjunto, conforme a Figura 2, fica:

$$r_o^o = \rho_o^o - r_{cm}^o$$

$$r_k^o = \rho_k^o - r_{cm}^o + a_{ok}^o - a_{ko}^o \,.$$

Derivando-se estas expressões duas vezes, e substituindo na equação da variação do momento angular, obtém-se:

$$\dot{L}^o = -M\,\Omega(r_{cm}^o)\,\ddot{r}_{cm}^o + \sum_{k=1}^{n} m_k\,\Omega(a_{ok}^o - a_{ko}^o)(\ddot{a}_{ok}^o - \ddot{a}_{ko}^o) +$$
$$+\int_{V_o} \Omega(\rho_o^o)\,\ddot{\rho}_o^o\,dm_o + \sum_{k=1}^{n}\int_{V_k} \Omega(\rho_k^o)\,\ddot{\rho}_k^o\,dm_k$$

onde M é a massa do conjunto (massa do corpo principal mais a massa dos apêndices). É claro que a posição do elemento de massa do elo k depende da posição relativa entre o próprio elo e o corpo principal do satélite. Entretanto, esta posição pode ser obtida em cada instante pois admite-se que haja um dispositivo que atue na junta com uma lei dinâmica conhecida, ou seja, a posição $\theta_k(t)$, a velocidade $\omega_k(t)$, e a aceleração $\dot{\omega}_k(t)$ da junta k em relação ao sistema o são fornecidas. Neste caso, existe uma matriz de transformação de coordenadas, $A_{o,k}(t)$, e sua inversa, $A_{k,o}(t)$, que levam vetores representados no sistema o ao sistema k e vice-versa. Como tanto o sistema de coordenadas o fixo ao corpo quanto o sistema k do elo k são não-inerciais, deve-se utilizar a relação

$$\ddot{r}_{p/a}^b = \Omega(\omega_{b/a}^b)\,\Omega(\omega_{b/a}^b)\,r_p^b - \Omega(r_p^b)\,\dot{\omega}_{b/a/b}^b\,,$$

que fornece a aceleração de um ponto num sistema de referência girante b com relação a um sistema inercial a. A substituição desta relação na equação da derivada do momento angular leva à uma modificação na equação de Euler, de forma a acomodar o efeito dos apêndices articulados:

$$\dot{L}^o = \left(I_o + J_n\right)\dot{\omega}_o^o + \Omega(\omega_o^o)\,I_o\,\omega_o^o + \dot{H}_n$$

onde os termos J_n e $\dot{H}_n$ levam em conta não somente a inércia dos apêndices, mas também o efeito decorrente da mudança do centro de massa do conjunto, devido ao movimento dos elos:

$$J_n = \sum_{k=1}^{n}\Big(A_{k,o}\,I_k\,A_{k,o}^T - m_k\,\Omega(a_{ok}^o - a_{ko}^o)\,\Omega(a_{ok}^o - a_{ko}^o)\Big) +$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\Big(m_k\,\Omega(a_{ok}^o - a_{ko}^o)\Big)\sum_{k=1}^{n}\Big(\mu_k\,\Omega(a_{ok}^o - a_{ko}^o)\Big)$$

$$J_n = \sum_{k=1}^{n}\Big(A_{k,o}\,I_k\,A_{k,o}^T - m_k\,\Omega(a_{ok}^o - a_{ko}^o)\,\Omega(a_{ok}^o - a_{ko}^o)\Big) + \frac{1}{m_t}\left(\sum_{k=1}^{n}\Big(m_k\,\Omega(a_{ok}^o - a_{ko}^o)\Big)\right)^2$$

sendo I_k a matriz de inércia do elo k com relação ao sistema k, e:

$$\dot{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \Big[\Omega(\omega_o^o + \omega_k^o)\, A_{k,o}\, I_k\, A_{k,o}^T\, (\omega_o^o + \omega_k^o) +$$
$$+ A_{k,o}\, I_k\, A_{k,o}^T\, (\Omega(\omega_o^o)\, \omega_k^o + \dot{\omega}_k^o) \Big] + \sum_{k=1}^{n} m_k\, \Omega(a_{ok}^o - a_{ko}^o)\, \beta_k -$$
$$-\Omega\left(\sum_{k=1}^{n} m_k\, (a_{ok}^o - a_{ko}^o) \right) \sum_{k=1}^{n} \mu_k\, \beta_k$$

$$\dot{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \Big[\Omega(\omega_o^o + \omega_k^o)\, A_{k,o}\, I_k\, A_{k,o}^T\, (\omega_o^o + \omega_k^o) +$$
$$+ A_{k,o}\, I_k\, A_{k,o}^T\, (\Omega(\omega_o^o)\, \omega_k^o + \dot{\omega}_k^o) \Big] + \sum_{k=1}^{n} m_k\, \Omega(a_{ok}^o - a_{ko}^o)\, \beta_k - m_t\, \Omega(r_{cm}^o) \sum_{k=1}^{n} \mu_k\, \beta_k$$

O termo β_k vale:

$$\beta_k = \Omega(\omega_o^o)\, \Omega(\omega_o^o)\, (a_{ok}^o - a_{ko}^o) - \Omega(\omega_o^o)\, \Omega(\omega_k^o)\, a_{ko}^o -$$
$$-\Omega(\omega_k^o)\, \Omega(\omega_o^o + \omega_k^o)\, a_{ko}^o + \Omega(a_{ko}^o) \left(\Omega(\omega_o^o)\, \omega_k^o + \dot{\omega}_k^o \right)$$

ou

$$\beta_k = \Omega(\omega_o^o)\, \Omega(\omega_o^o)\, a_{ok}^o - \Omega(\omega_o^o + \omega_k^o)\, \Omega(\omega_o^o + \omega_k^o)\, a_{ko}^o + \Omega(a_{ko}^o) \left(\Omega(\omega_o^o)\, \omega_k^o + \dot{\omega}_k^o \right)$$

Nota-se que o termo $A_{k,o}\, I_k\, A_{k,o}^T$ é a matriz de inércia do apêndice k com relação ao centro de massa do apêndice e em relação a um sistema de eixos paralelo ao sistema do corpo principal. Além disso, o termo $m_k\, \Omega(a_{ok}^o - a_{ko}^o)\, \Omega(a_{ok}^o - a_{ko}^o)$ faz a translação do sistema de eixos até o sistema geométrico do satélite, e o último termo faz a translação até o centro de massa do conjunto. Logo, J_n é a matriz de inércia de todos os apêndices com relação ao centro de massa do satélite, e descrito no sistema geométrico do corpo principal.

A equação de $\dot{L}^o$ é similar à obtida para corpos rígidos, e como esta última, pode ser invertida e colocada em termos de uma equação diferencial:

$$\dot{\omega}_o^o = \left(I_o + J_n \right)^{-1} \left[\sum \left(N_{cont} + N_{per} \right) - \Omega(\omega_o^o)\, I_o\, \omega_o^o - \dot{H}_n \right]$$

Considerando um satélite com rodas de reação, tem-se

$$\dot{\omega}_o^o = \left(I_o + J_n \right)^{-1} \left[\sum \left(N_{cont} + N_{per} \right) - \Omega(\omega_o^o)\, (I_o\, \omega_o^o + h) - \dot{h} - \dot{H}_n \right]$$
$$\dot{\omega}_o^o = \left(I_o + J_n \right)^{-1} \left[\sum \left(N_{cont} + N_{per} \right) + (I_o\, \omega_o^o) \times \omega_o^o + h \times \omega_o^o - \dot{h} - \dot{H}_n \right]$$

$$\dot{h}_i = T_i$$

Cabe salientar que a esta modelagem exige o conhecimento da aceleração angular de cada apêndice, embora esta aceleração não seja conhecida em alguns casos. De fato, motores de corrente contínua e molas de torção fornecem relações de torque bem conhecidas e, portanto, seria mais natural especificar o torque e não a aceleração. Porém, em alguns casos, particularmente em motores de passo que giram painéis solares, o torque é bastante variável em função da posição. Uma análise simplificada deste tipo de atuação sugere que é mais proveitoso considerar uma velocidade angular conhecida em função do tempo do que simplesmente um torque, uma vez que motores de passo ou mesmo motores CC com redução conseguem controlar facilmente a posição ou a velocidade de rotação. Contudo, já que o equacionamento necessita também a aceleração angular, pode-se então ajustar um perfil desta aceleração tal que a velocidade desejada seja atingida após um determinado intervalo de tempo. A velocidade e a posição serão então integradas numericamente a partir desta aceleração. A aceleração pode ser reajustada posteriormente por meio da realimentação da velocidade.

Os parâmetros necessários para a dinâmica dos painéis são: a matriz de inércia I_k de cada painel k em relação a um sistema fixado em seu centro de massa; a matriz de inércia I_o do corpo principal em relação a um sistema geométrico fixado em seu centro de massa; a velocidade angular ω_k^o e a aceleração angular $\dot{\omega}_k^o$ em função do tempo, do apêndice k expresso no sistema geométrico do satélite o; a posição de um ponto na junta k em relação ao sistema do satélite, a_{ok}^o, e em relação ao sistema do apêndice k, a_{ko}^o, ambos expressos no sistema do satélite; a massa m_k de cada apêndice, a massa m_o do corpo principal, e a matriz de rotação $A_{k,o}(t)$ (função do tempo) entre o sistema de referência do apêndice k e o sistema do satélite. Percebe-se que algumas informações encontram-se repetidas neste equacionamento, uma vez que a matriz de rotação $A_{k,o}(t)$ leva em conta não apenas a rotação da junta, mas também a geometria entre os sistemas de eixos, já fornecida pelos vetores a_{ok}^o e a_{ko}^o. De forma a solicitar apenas as informações relevantes para o problema, e eliminar possíveis redundâncias, será adotado, na descrição da geometria do satélite, a notação de Denavit-Hartenberg, largamente utilizada em robótica.

Chega-se assim aos parâmetros que devem ser fornecidos para a dinâmica dos painéis: a matriz de inércia I_k de cada painel k em relação a um sistema fixado em seu centro de massa, a massa m_k de cada apêndice; dez parâmetros de Denavit-Hartenberg que relacionam o sistema do corpo principal com o sistema do apêndice k, e aceleração angular em função do tempo $\dot{\omega}_k^o$. Para o corpo principal, são necessárias as informações: a matriz de inércia I_o do corpo principal em relação a um sistema geométrico fixado em seu centro de massa, a massa m_o do corpo principal.

Para obter os parâmetros de Denavit-Hartenberg para o apêndice k, considere os sistemas de eixos mostrados na Figura 3. O sistema $x^o y^o z^o$ é o sistema geométrico de coordenadas, fixado no corpo principal do satélite, cuja origem não necessariamente passa pelo centro de massa. O sistema $x^k y^k z^k$ é fixado no centro de massa do apêndice k. O sistema $x^j y^j z^j$ é fixado num determinado ponto da junta que gira o apêndice k. O sistema $x^n y^n z^n$ é tal que seu eixo z^n coincide com o eixo z^k. Determina-se a reta mutuamente perpendicular aos eixos z^o e z^j, e entre os eixos z^j e z^k. Se um destes eixos for paralelo ao outro, então adota-se qualquer reta mutuamente perpendicular. A distância entre os eixos é conhecida como comprimento do elo e vale a_0 e a_1, respectivamente. Os eixos x^j e x^n são obtidos como prolongamentos dos comprimentos dos elos. As distâncias d_0, d_1 e d_2 constituem os deslocamentos das juntas, e são positivas se medidas na direção positiva do eixo z correspondente. Projetando-se a direção de x^j no plano formado por x^o e y^o, obtém-se o ângulo de rotação da junta θ_0, medido entre x^o e a projeção de x^j. O mesmo raciocínio permite que sejam obtidos os ângulos θ_1 e θ_2. Estes ângulos são positivos se orientados segundo a regra da mão direita no sentido positivo do eixo z correspondente. Nota-se que θ_1 irá forncer o ângulo de rotação da junta na situação inicial, na qual o ângulo $\theta(t) = \theta(0) = 0$. Finalmente, os ângulos de torção são medidos entre as projeções dos eixos z anteriores nos planos yz dos sistemas posteriores. Assim, t_0 mede o ângulo entre z^o e z^j, e t_1 mede o ângulo entre z^j e z^k. Veja-se que o ângulo t_0 é negativo na Figura 3. Tem-se, ao todo, dez elementos escalares para cada junta, que permitem que sejam obtidos os parâmetros necessários na dinâmica de atitude: θ_0, d_0, a_0, t_0, θ_1, d_1, a_1, t_1, θ_2 e d_2.

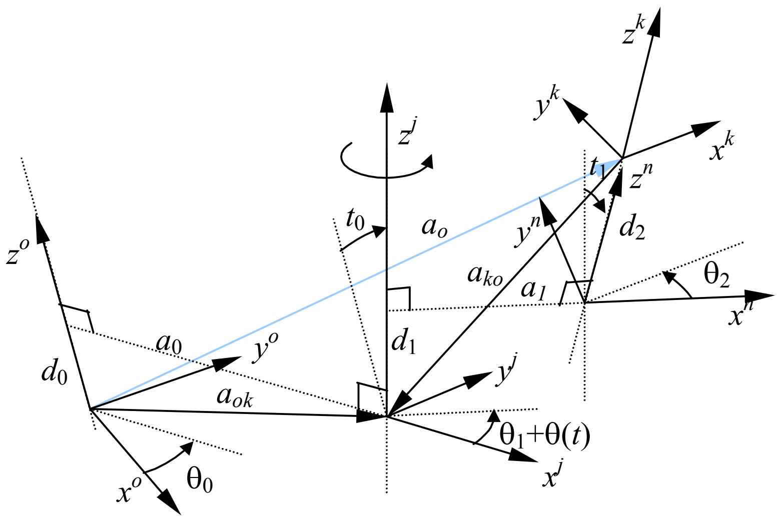


Fig 3 – Sistemas de coordenadas do corpo principal, da junta e do apêndice k.

A matriz homogênea que permite expressar um vetor dado no sistema do apêndice no sistema geométrico do corpo principal é então dada por:

$$A_{k,o} = A_{j,o}\ R_z(t)\ A_{k,j}\ ,$$

onde as matrizes $A_{j,o}$, $R_z(t)$ e $A_{k,j}$ valem, respectivamente:

$$A_{j,o} = R_z(\theta_0)\, T(a_0, 0, d_0)\, R_x(t_0)$$

$$R_z(t) = R_z(\theta(t))$$

e

$$A_{k,j} = R_z(\theta_1)\, T(a_1, 0, d_1)\, R_x(t_1)\, R_z(\theta_2)\, T(0, 0, d_2)$$

As matrizes de rotação e translação indicadas são todas geométricas. O vetor a_{ok}^o é dado pela última coluna de $A_{j,o}$; o vetor a_{ko}^k é dado pela última coluna de $A_{k,j}^{-1}$. Veja que estes vetores não dependem do tempo. O vetor $a^o = a_{ok}^o - a_{ko}^o$ é dado pela última coluna de $A_{k,o}$. Finalmente, o vetor a_{ko}^o será obtido por meio de $a_{ko}^o = a_{ok}^o - a^o$. Nota-se que, se for utilizada a notação de coordenadas homogêneas indicada acima, a operação $A_{k,o}\ a_{ko}^k$ não resulta no vetor a_{ko}^o. De fato, a relação correta é:

$$a_{ko}^{o} = A_{k,o}\ (a_{ko}^{k} - 0)\,,$$

que resulta:

$$a_{ko}^{o} = -r_z(\theta_0)\, r_x(t_0)\, r_z(\theta_k(t))\, r_z(\theta_1)\,[v_1 + r_x(t_1)\, r_z(\theta_2)\, v_2]$$

onde o vetor nulo possui coordenadas homogêneas dadas por (0, 0, 0, 1), $v_0 = (a_0, 0, d_0)$, $v_1 = (a_1, 0, d_1)$ e $v_2 = (0, 0, d_2)$. As matrizes r_l são matrizes de rotação convencionais quadradas de ordem 3.

Se uma matriz de transformação é tal que

$$A = \begin{pmatrix} r & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

onde r é uma matriz de rotação e v é um vetor de deslocamento, então a sua inversa vale:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} r^T & -r^T\ v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

As matrizes homogêneas de translação e rotação (geométricas) são dadas por:

$$T(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nota-se também que o vetor que fornece a direção da velocidade angular da junta k no sistema do satélite é dado pela direção do eixo z^j, conforme a Figura 3. Assim, esta direção corresponde à terceira coluna da matriz $A_{j,o}$. Igualmente, a direção da aceleração angular é a mesma.

A matriz $A_{j,o}$ será decomposta na forma:

$$A_{j,o} = \begin{pmatrix} r_z(\theta_0) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & v_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_x(t_0) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

onde $v_0 = (a_0, 0, d_0)$. Efetuando o produto, tem-se

$$A_{j,o} = \begin{pmatrix} r_z(\theta_0)\, r_x(t_0) & r_z(\theta_0)\, v_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de onde tira-se que $a^o_{ok} = r_z(\theta_0)\, v_0$

Analogamente, a matriz $A_{k,j}$ será dada por:

$$A_{k,j} = \begin{pmatrix} r_z(\theta_1) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & v_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_x(t_1) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_z(\theta_2) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & v_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

onde $v_1 = (a_1, 0, d_1)$ e $v_2 = (0, 0, d_2)$, que pode ser reescrita como

$$A_{k,j} = \begin{pmatrix} r_z(\theta_1)\, r_x(t_1)\, r_z(\theta_2) & r_z(\theta_1)\, [r_x(t_1)\, r_z(\theta_2)\, v_2 + v_1] \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de onde tira-se que $a^j_{ko} = r_z(\theta_1)\, [r_x(t_1)\, r_z(\theta_2)\, v_2 + v_1]$

Finalmente, pode-se obter a matriz completa, por meio de:

$$A_{k,o} = A_{j,o}\; R_z(t)\; A_{k,j}\,,$$

ou seja

$$A_{k,j} = \begin{pmatrix} r_{j,o} & a^o_{ok} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_z(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{k,j} & a^j_{ko} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{k,j} = \begin{pmatrix} r_{j,o}\; r_z(t)\, r_{k,j} & r_{j,o}\; r_z(t)\, a^j_{ko} + a^o_{ok} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e portanto $a^o = r_{j,o}\; r_z(t)\, a^j_{ko} + a^o_{ok}$, onde

$$r_{j,o} = r_z(\theta_0)\, r_x(t_0)\,.$$

A velocidade angular da junta, ω_k, é obtida de:

$$\omega^o_o = \dot{\theta}(t)\, r_{j,o}\; k\,,$$

no qual k = (0, 0, 1), já que a rotação se dá sobre o eixo z^j. Finalmente, a aceleração angular fica:

$$\dot{\omega}_o^o = \ddot{\theta}(t)\ r_{j,o}\ k\,.$$

Supondo que a aceleração angular α_k dos painéis é constante por trechos, e conhecida no instante t_o, bem como a velocidade e posição angular, pode-se então calcular a velocidade e posição angular de cada painel no instante t por meio de:

$$\dot{\omega}_k(t) = \alpha_k$$
$$\omega_k(t) = \omega_k(t_o) + (t - t_o)\ \alpha_k$$
$$\theta_k(t) = \theta_k(t_o) + (t - t_o)\ \omega_k(t_o) + 0.5\,(t - t_o)^2\,\alpha_k$$

Matriz de produto vetorial

A derivada temporal de uma matriz de rotação é dada por (Wertz, 1978):

$$\dot{A}_{b,a} = \Omega(\omega_{b/a}^a)\ A_{b/a}$$

sendo que $\Omega(\cdot)$ é a matriz de produto vetorial, dada por:

$$\Omega(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

onde ω_x, ω_y, ω_z são as componentes do vetor ω. A matriz de produto vetorial é uma função ímpar, já que $\Omega(-\omega) = -\Omega(\omega)$. Tanto quanto o produto vetorial, a mudança da ordem dos operandos da matriz Ω inverte o sinal do resultado:

$$\Omega(\omega)\ r = -\Omega(r)\ \omega$$

Pela definição de produto vetorial, tem-se que

$$\Omega(\omega)\ r = \omega \times r$$

Seja agora o triplo produto vetorial:

$$r = u \times (v \times w)$$

Da definição segue-se:

$$u \times (v \times w) = \Omega(u)\ \Omega(v)\ w$$

Porém, o produto

$$r = (u \times v) \times w$$

será dado por

$$(u \times v) \times w = \Omega(\Omega(u)\ v)\ w$$

mas

$$(u \times v) \times w = -w \times (u \times v) = -\Omega(w)\ \Omega(u)\ v$$

ou seja

$$\Omega(\Omega(u)\ v)\ w = -\Omega(w)\ \Omega(u)\ v = \Omega(w)\ \Omega(v)\ u$$

$$\Omega^2(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_y^2 - \omega_z^2 & \omega_x \omega_y & \omega_x \omega_z \\ \omega_x \omega_y & -\omega_x^2 - \omega_z^2 & \omega_y \omega_z \\ \omega_x \omega_z & \omega_y \omega_z & -\omega_x^2 - \omega_y^2 \end{bmatrix}$$

$$\Omega^2(\omega) = \omega\ \omega^T - \omega^2\ I_3$$

Amortecedor de nutação

Deseja-se obter as equações dinâmicas de um satélite com um sistema de amortecimento de nutação passiva. Em geral este equacionamento é dependente do tipo de amortecedor de nutação empregado, o que significa que se deve obter um equacionamento específico para cada tipo e característica do amortecedor. Contudo, deseja-se obter um equacionamento que tenha características gerais dos amortecedores, de forma que forneça resultados aproximados independentemente do tipo de amortecedor empregado.

Qualquer que seja o tipo de amortecedor empregado, fisicamente ele será composto de duas partes que possuem movimento relativo entre si. Existem sistemas com anéis contendo fluido dentro, segmentos de anéis com uma esfera e fluido no interior, massas acopladas a molas, palhetas engastadas, material ferromagnético no interior de bobinas magnetizadas, etc. Todos estes sistemas apresentam a característica de movimento relativo. Isto também significa que satélites que possuam amortecedores de nutação não podem ser considerados corpos rígidos, mas sim como compostos por dois ou mais sistemas rígidos, o que significa que as equações dinâmicas de Euler:

$$\dot{L} = L \times \omega + N\,,$$

onde N representa o somatório dos torques externos, passam agora a representar dois ou mais corpos, ou seja:

$$\dot{L} = L \times \omega + N$$
$$\dot{L}_o = L_o \times \omega_o + N_o\,.$$

O problema é que os torques de reação, isto é, os torques que agem entre os dois corpos são difíceis de serem modelados, pois em algumas situações alguns destes torques passam a agir como forças (no caso, por exemplo, de massas acopladas a molas). Para simplificar o problema e sem perda de generalidade, pode-se expressar o movimento do segundo corpo (amortecedor de nutação) em relação ao movimento do primeiro.

Um amortecedor de nutação passivo dissipa energia interna do sistema por meio de atrito viscoso ou por histerese. A força ou torque de atrito viscoso, por sua vez, pode ser modelado, com certo grau de aproximação, como proporcional à velocidade relativa entre dois corpos:

$$N_n = k\, u$$

Quando aplicado à inercia do corpo, este torque produz a aceleração dada por:

$$\dot{u} = I^{-1}\; k\, u$$

Pode-se admitir que o amortecedor de nutação possua liberdade de rotação nos 3 eixos do satélite, de onde vem que se um amortecedor de nutação possuir uma matriz de inércia I_o, então o momento angular (relativo ao satélite) do amortecedor será:

$$h = I_o\; (\omega_o - \omega)$$

onde ω_o é a velocidade angular do amortecedor (relativo a um referencial inercial) e ω é a velocidade angular do satélite. Por sua vez, o momento angular do satélite será dado por:

$$L = I\; \omega + h\,.$$

Veja que a matriz de inércia do satélite incorpora também a inércia do amortecedor, pois que o momento angular pode ser decomposto na forma:

$$L = I\; \omega + h = (I_s + I_o)\; \omega + I_o\; (\omega_o - \omega) = I_s\; \omega + I_o\; \omega_o\,,$$

onde I_s é a matriz de inércia do satélite sem incluir a matriz de inércia do amortecedor de nutação (há um problema aqui: a inércia total não é a soma das inércias parciais, mas leva em conta também a posição do centro de massa do segundo corpo). Em outras palavras, o momento angular total é a soma dos momentos angulares individuais. A equação dinâmica de corpo rígido para o satélite é dada por (Wertz, pg. 522):

$$\dot{L} = (L + h) \times \omega - \dot{h} + N$$

Porém, a variação do momento angular do amortecedor é igual ao torque de amortecimento, ou seja:

$$\dot{h} = -c\; (\omega_o - \omega)\,,$$

ou ainda:

$$\dot{h} = -c\,(I_o^{-1}\,h - \omega)\,,$$

onde c é uma constante de amortecimento (escalar). Pode-se expressar a constante de amortecimento como sendo uma matriz diagonal:

$$c = \begin{pmatrix} c_x & 0 & 0 \\ 0 & c_y & 0 \\ 0 & 0 & c_z \end{pmatrix},$$

de tal forma que o amortecedor poderá, neste caso, ser aplicado individualmente a qualquer um dos eixos. Caso deseje-se, por exemplo, utilizar um amortecedor apenas no eixo x do satélite, então deve-se fazer c_y e c_z iguais a zero. (Obs: fazendo-se cy e cz iguais a zero e substituindo-se na expressão do momento angular, chega-se às expressões do Wertz (pg. 628). Há porém uma discrepância na relação de dh/dt.

Refazendo:

Num satélite formado por dois corpos rígidos, o momento angular é dado por:

$$L = I\,\omega + h\,.$$

onde o momento de inércia I inclui a massa do segundo corpo (roda) girando com a mesma velocidade angular do satélite, ou seja, é o momento angular do satélite considerando as rodas paradas em relação a ele. O momento angular do segundo corpo h é portanto relativo ao movimento do corpo principal, de tal forma que:

$$h = I_o\,u = I_o\,(\omega_o - \omega)$$

Substituindo esta expressão na anterior tem-se

$$L = I_s\,\omega + I_o\,\omega_o\,.$$

onde I_s é o momento angular do satélite sem as massas girantes, e ω_o é a velocidade angular da massa girante com relação ao referencial inercial. Derivando agora o momento angular, tem-se:

$$I\,\dot{\omega} = (I\,\omega + h)\times\omega - \dot{h} + N\,.$$

Nota-se que a derivada do momento angular da roda é igual ao torque aplicado pelo sistema de controle T_c, ou seja:

$$\dot{h} = I_o\,\dot{u} = T_c$$

que pode ser integrada para obter-se a velocidade da roda em relação ao satélite. No caso do amortecedor de nutação, nota-se que o momento angular é obtido no sistema do satélite, o que significa que é necessário mudar o sistema de referência para representá-lo no sistema do próprio amortecedor de nutação. Isto seria necessário caso a matriz de inércia do amortecedor fosse não diagonal, ou com momentos principais distintos. Se ela possuir simetria esférica, isto é, se todos os momentos principais forem iguais, então não há necessidade de integrar o momento angular do amortecedor no sistema próprio, o que leva a

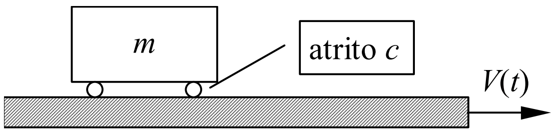
$$\dot{h} = I_o \, \dot{u} = T_a \, ,$$

onde T_a é o torque de amortecimento, e I_o, neste caso, é um escalar.

Dissipação da energia

Para entender como opera a dissipação de energia num amortecedor de nutação, considera-se um caso simplificado, mostrado na figura abaixo. Uma massa, representando a inércia do amortecedor, está sujeita a uma força de atrito com relação a uma mesa (o satélite) que se desloca segundo uma função do tempo $V(t)$. O equilíbrio de forças fornece

$$m \, \dot{v} = c \left(V(t) - v \right)$$



A solução da equação homogênea é dada por:

$$v(t) = k \; \mathrm{e}^{-\frac{c}{m} t} \, ,$$

onde k é uma constante de integração. Considerando que $V(t)$ seja uma função periódica no tempo, na forma:

$$V(t) = a \, \mathrm{sen}(\omega t + \phi) \, ,$$

então a solução particular será

$$v(t) = u \, \mathrm{sen}(\omega t) \, ,$$

pois

$$m \, \dot{v} + c \, v = m \, u \; \omega \cos \omega t + c \, u \, \mathrm{sen} \, \omega t \, .$$

Mas

$$c \, V(t) = c \, a \, \mathrm{sen}(\omega t + \phi) = c \, a \, \mathrm{sen}\phi \cos \omega t + c \, a \cos \phi \, \mathrm{sen} \omega t \, ,$$

de onde tira-se

$$\begin{aligned} m \, u \; \omega &= c \, a \, \mathrm{sen}\phi \\ c \, u &= c \, a \cos \phi \end{aligned} \, .$$

Dividindo-se ambos os termos, chega-se a

$$\tan\phi = \frac{m\,\omega}{c},$$

de onde obtém-se

$$\cos\phi = \frac{c}{\sqrt{c^2 + m^2\,\omega^2}},$$

e portanto

$$u = a\cos\phi = \frac{c\,a}{\sqrt{c^2 + m^2\,\omega^2}}.$$

Além disso,

$$\text{sen}\phi = \frac{m\,\omega}{\sqrt{c^2 + m^2\,\omega^2}}.$$

e com isso

$$v(t) = \frac{a\,c}{\sqrt{c^2 + m^2\,\omega^2}}\,\text{sen}\,\omega t,$$

A energia despendida num ciclo é dada por:

$$E = \int_0^T F(t)\,d(X - x) = \int_0^T c\,\big(V(t) - v(t)\big)\,d(X - x)$$

Veja porém que

$$d(X - x) = (\dot{X} - \dot{x})\,dt = \big(V(t) - v(t)\big)\,dt$$

e portanto

$$E = \int_0^T F(t)\,d(X - x) = \int_0^T c\,\big(V(t) - v(t)\big)^2\,dt$$

$$E = c\int_0^T \big(a\,\text{sen}\phi\,\cos\omega t + a\,\cos\phi\,\text{sen}\omega t - a\cos\phi\,\text{sen}\,\omega t\big)^2\,dt$$

$$E = c\,a^2\int_0^T \big(\text{sen}\phi\,\cos\omega t\big)^2\,dt$$

Mas

$$E = c\, a^2 \int_0^T \mathrm{sen}^2\phi \cos^2 \omega t \, dt = c\, a^2 \,\mathrm{sen}^2\phi \,\frac{\pi}{\omega}$$

Pois

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

A integral resulta:

$$E = \pi\, c\, a^2 \,\frac{m^2\, \omega}{c^2 + m^2\, \omega^2}$$

O amortecimento no qual a energia dissipada é máxima ocorre quando a variação da energia em função do coeficiente de amortecimento for nula:

$$E = \pi\, a^2 \,\frac{m^2\, \omega}{c^2 + m^2\, \omega^2} - 2\pi\, c^2\, a^2 \,\frac{m^2\, \omega}{(c^2 + m^2\, \omega^2)^2}$$

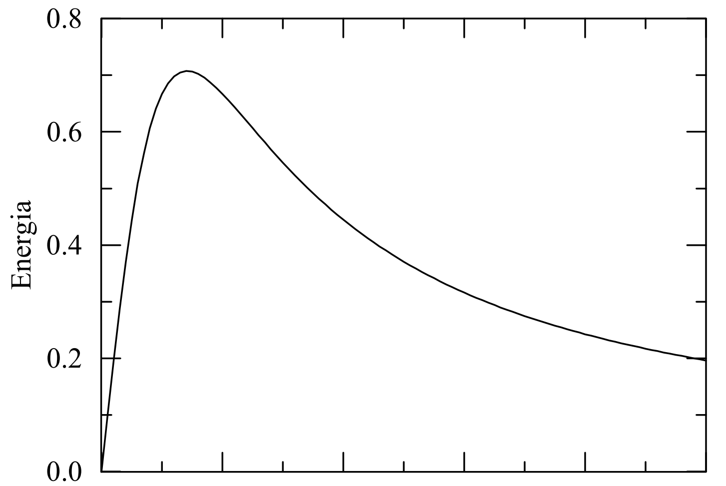
ou

$$E = \pi\, a^2\, m^2\, \omega \left[\frac{m^2\, \omega^2 - c^2}{(c^2 + m^2\, \omega^2)^2}\right] = 0$$

de onde tira-se que

$$c = m\, \omega$$

A figura abaixo mostra a energia dissipada em função do coeficiente de amortecimento.



Equações cinemáticas do movimento

Uma vez integrada as equações dinâmicas, procede-se a integração das equações cinemáticas. No entanto, a integração do movimento nas variáveis angulares de Euler leva usualmente a singularidades durante o processamento numérico. Por isso, é conveniente efetuar esta integração por meio de quatérnions que, se por um lado elimina o inconveniente das singularidades, por outro dificulta a visualização da atitude (Wertz, 1978):

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{2}\,\tilde{\Omega}(\omega_o^o)\,q$$

com

$$q^T = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{bmatrix}$$

e $\tilde{\Omega}(\cdot)$ representa, agora, a matriz de produto vetorial estendida (e com sinal trocado):

$$\tilde{\Omega}(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y & \omega_x \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & \omega_y \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & \omega_z \\ -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z & 0 \end{bmatrix}$$

As equações diferenciais dinâmicas e cinemáticas são integradas a partir das condições iniciais conhecidas $\omega_o(t_0)$ e $q(t_0)$, onde t_0 é o instante inicial. Uma vez obtido o vetor de quatérnions, determina-se a matriz de rotação A, que relaciona a posição inicial do satélite com a posição atual:

$$A = \begin{bmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1 q_2 + q_3 q_4) & 2(q_1 q_3 - q_2 q_4) \\ 2(q_1 q_2 - q_3 q_4) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_2 q_3 + q_1 q_4) \\ 2(q_1 q_3 + q_2 q_4) & 2(q_2 q_3 - q_1 q_4) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix}$$

Fazendo a correspondência entre as componentes da matriz A com

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

pode-se obter os ângulos de Euler referentes a uma rotação 3-1-3, por exemplo:

$$\phi = \arctan\big(a_{31} / (-a_{32})\big),\ 0 \le \phi < 2\pi$$

$$\eta = \arccos\big(a_{33}\big),\ 0 \le \eta < \pi$$

$$\psi = \arctan\big(a_{13} / a_{23}\big),\ 0 \le \psi < 2\pi$$

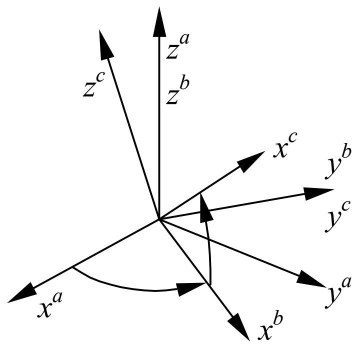
Resta agora obter $q(t_0)$ a partir da atitude inicial do satélite. Seja então a matriz de rotação B que relaciona um sistema de referência inercial com a atitude inicial. Então, as componentes do quatérnion inicial podem ser obtidas, entre outras formas, por:

$$q_4(t_0) = \tfrac{1}{2}\sqrt{1 + b_{11} + b_{22} + b_{33}}$$
$$q_1(t_0) = \frac{1}{4q_4}\left(b_{23} - b_{32}\right)$$
$$q_2(t_0) = \frac{1}{4q_4}\left(b_{31} - b_{13}\right)$$
$$q_3(t_0) = \frac{1}{4q_4}\left(b_{12} - b_{21}\right)$$

As equações dinâmicas e cinemáticas serão integradas numericamente, utilizando um integrador numérico de passo variável. A descrição das matrizes de inércia e posição dos elos e juntas para este satélite é feita na próxima seção. A dinâmica da abertura dos painéis não será considerada, mas apenas a movimentação em modo nominal.

Rotações entre sistemas de coordenadas

Considera-se dois sistemas de coordenadas: x^a, y^a, z^a, e x^c, y^c, z^c, tal que exista um sitema x^c, y^b, z^b, que relaciona ambos os sistemas, como mostra a figura abaixo.



Se as coordenadas de um ponto ou de um vetor V^a são conhecidas no sistema *a*, então as coordenadas deste ponto ou vetor no sistema *c* serão dadas por:

$$V^c = R_{b\to c}\, R_{a\to b}\, V^a$$

onde $R_{b\to c}$ e $R_{a\to b}$ são as matrizes de rotação que relacionam os sistemas *b* a *c*, e *a* a *b*, respectivamente. Tais matrizes são rotações de coordenadas (não geométricas), e o ângulo de rotação na matriz $R_{a\to b}$ é tal que sai do sistema *a* e vai para o sistema *b*, ou seja, ao se mover o sistema de coordenadas *a* da posição inicial para a posição *b* ter-se-á o ângulo de rotação.

Outras situações exigem que se obtenha o vetor V^a a partir do conhecimento do vetor V^c. Neste caso, a transformação é a inversa da anterior e fica:

$$V^a = R^T_{a\to b}\, R^T_{b\to c}\, V^c$$

Equações do movimento utilizando a notação de vetrizes

A noção de vetrizes, adotada em certos livros que modelam as equações dinâmicas do movimento como Hughes, por exemplo, permite uma forma compacta e eficiente de representação algébrica, mantendo ainda assim a associação com a física do movimento.