



Ministério da  
**Ciência, Tecnologia  
e Inovação**



[sid.inpe.br/mtc-m19/2012/07.31.21.08-PUD](http://sid.inpe.br/mtc-m19/2012/07.31.21.08-PUD)

## ANÁLISE E CONTROLE DE SISTEMAS LINEARES

Valdemir Carrara

URL do documento original:

<http://urlib.net/8JMKD3MGP7W/3CCHMQP>

INPE  
São José dos Campos  
2012

**PUBLICADO POR:**

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Gabinete do Diretor (GB)

Serviço de Informação e Documentação (SID)

Caixa Postal 515 - CEP 12.245-970

São José dos Campos - SP - Brasil

Tel.:(012) 3208-6923/6921

Fax: (012) 3208-6919

E-mail: pubtc@sid.inpe.br

**CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO DA PRODUÇÃO INTELLECTUAL DO INPE (RE/DIR-204):****Presidente:**

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

**Membros:**

Dr. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado - Coordenação Engenharia e Tecnologia Espacial (ETE)

Dr<sup>a</sup> Inez Staciarini Batista - Coordenação Ciências Espaciais e Atmosféricas (CEA)

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação Observação da Terra (OBT)

Dr. Germano de Souza Kienbaum - Centro de Tecnologias Especiais (CTE)

Dr. Manoel Alonso Gan - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CPT)

Dr<sup>a</sup> Maria do Carmo de Andrade Nono - Conselho de Pós-Graduação

Dr. Plínio Carlos Alvalá - Centro de Ciência do Sistema Terrestre (CST)

**BIBLIOTECA DIGITAL:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação de Observação da Terra (OBT)

**REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:**

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Yolanda Ribeiro da Silva Souza - Serviço de Informação e Documentação (SID)

**EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:**

Vivéca Sant´Ana Lemos - Serviço de Informação e Documentação (SID)



Ministério da  
**Ciência, Tecnologia  
e Inovação**



[sid.inpe.br/mtc-m19/2012/07.31.21.08-PUD](http://sid.inpe.br/mtc-m19/2012/07.31.21.08-PUD)

## ANÁLISE E CONTROLE DE SISTEMAS LINEARES

Valdemir Carrara

URL do documento original:

<http://urlib.net/8JMKD3MGP7W/3CCHMQP>

INPE  
São José dos Campos  
2012



## Resumo

Este curso de Análise e Controle de Sistemas Lineares foi preparado para atender as necessidades de disciplinas de Sistemas Lineares e Controle de Sistemas Lineares em cursos de Engenharia da Computação, Engenharia Elétrica-Eletrônica, Engenharia Mecânica e Engenharia de Controle e Automação. Procurou-se dar ênfase aos princípios básicos necessários à compreensão do assunto, sem contudo dar ênfase em excesso à teoria. O leitor poderá consultar os livros citados na bibliografia caso tenha necessidade de informações detalhadas sobre determinado tópico. Os exemplos foram escolhidos para consolidar o conhecimento e permitir a visão das possíveis aplicações, sem contudo ser exaustivo. Os capítulos de 1 a 6 cobrem a Análise de Sistemas Lineares e o Controle é coberto a partir do capítulo 7. O capítulo 1 faz uma revisão da teoria de equações diferenciais lineares, cobrindo também as ferramentas necessárias para a sua compreensão como, por exemplo, as funções descontínuas (degrau e impulso) e os números complexos. A transformada de Laplace é desenvolvida no capítulo 2 e as equações elementares de sistemas lineares é apresentada no capítulo seguinte. O capítulo 4 mostra a decomposição de funções de transferência em frações parciais, e os diagramas de blocos são mostrados no capítulo 5. Seguem a análise da resposta de sistemas lineares às excitações descontínuas e o controle clássico (proporcional, derivativo, integral) nos demais capítulos. O material de consulta utilizado baseou-se nos livros clássicos da área, apresentados na bibliografia.



# **Analysis and Control of Linear Systems**

## **Abstract**

This course of Analysis and Control of Linear Systems was prepared to help under graduated students in the courses of Linear Systems and Linear Control Systems in Computer Engineering, Electrical Engineering, Electronics, Mechanical Engineering and Control and Automation Engineering. The basic principles necessary to understand each topic were emphasized, avoiding to give much attention on theory. The readers are encouraged to consult the books cited in the bibliography if they need more information on a particular subject. The examples contained in this book were chosen in order to consolidate the knowledge and to provide to the readers the possible applications of theory, however not being to much comprehensive, in favor of clariness. Chapters 1-6 cover the Analysis of Linear Systems and the Control is covered starting from Chapter 7. Chapter 1 reviews the theory of linear differential equations, and covers the tools necessary for their understanding, like, for instance, discontinuous functions (step and impulse) and complex numbers. The Laplace transform is developed in Chapter 2 and the basic equations of linear systems is presented in the next chapter. Chapter 4 shows the decomposition of transfer functions in partial fractions, and the block diagrams are shown in Chapter 5. In sequence the response analysis of linear systems with discrete excitations and the classic controller (proportional, derivative, integral) are presented in the remaining chapters. The bibliografy used to compile this course was based on the classical books of Control Systems.





# Sumário

Pág.

<b>1</b>	<b>CONCEITOS FUNDAMENTAIS .....</b>	<b>1</b>
1.1	Noções básicas de sistemas .....	1
1.2	Linearizações de sistemas não lineares .....	5
1.3	Números complexos .....	7
1.4	Séries de funções com infinitos termos .....	9
1.5	Funções descontínuas no tempo .....	11
1.6	Equações diferenciais ordinárias a coeficientes constantes .....	13
1.7	Movimento harmônico amortecido .....	18
1.8	Exercícios .....	22
<b>2</b>	<b>TRANSFORMADA DE LAPLACE .....</b>	<b>23</b>
2.1	Definição de transformada de Laplace .....	23
2.2	Propriedades da transformada de Laplace .....	23
2.3	Transformadas de Laplace de funções simples .....	25
2.4	Função de transferência .....	26
2.5	Polinômio característico .....	30
<b>3</b>	<b>SISTEMAS DINÂMICOS LINEARES.....</b>	<b>33</b>
3.1	Elementos de sistemas dinâmicos.....	33
3.2	Mecânico translacional .....	33
3.3	Mecânico rotacional .....	35
3.4	Elétrico .....	36
3.5	Hidráulico .....	37
3.6	Elementos de entrada – fontes .....	40
3.7	Modelagem de sistemas dinâmicos pela transformada de Laplace .....	41
3.8	Elementos transformadores e transdutores .....	47
3.8.1	Elementos transformadores .....	47
3.8.2	Elementos transdutores.....	51
3.9	Exercícios .....	54
<b>4</b>	<b>TRANSFORMADAS INVERSAS DE FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA.....</b>	<b>59</b>
4.1	Transformada inversa de Laplace para sistemas lineares .....	59
4.2	Decomposição em frações parciais para $m < n$ .....	59
4.3	Decomposição em frações parciais quando $m \geq n$ .....	63
4.4	Decomposição em frações quando $G(s)$ possui pólos múltiplos .....	65
4.5	Análise algébrica da função de transferência .....	68
4.6	Exercícios .....	70
<b>5</b>	<b>DIAGRAMA DE BLOCOS .....</b>	<b>71</b>
5.1	Conceito de diagrama de blocos .....	71
5.2	Manipulação de diagrama de blocos .....	74
5.3	Exercícios .....	79
<b>6</b>	<b>ANÁLISE DO TRANSIENTE DE RESPOSTA.....</b>	<b>83</b>
6.1	Transiente de resposta .....	83
6.2	Sistemas de primeira ordem .....	84
6.2.1	Resposta do sistema de primeira ordem ao degrau unitário .....	84
6.2.2	Resposta do sistema de primeira ordem ao impulso unitário .....	85
6.2.3	Resposta do sistema de primeira ordem à rampa .....	85
6.3	Sistemas de segunda ordem.....	87

6.3.1	Resposta do sistema de segunda ordem para $0 < \zeta < 1$ .....	88
6.3.2	Resposta do sistema de segunda ordem para $\zeta = 1$ .....	90
6.3.3	Resposta do sistema de segunda ordem para $\zeta > 1$ .....	91
6.4	Análise de desempenho com base na resposta transiente .....	92
<b>7</b>	<b>CONTROLE CLÁSSICO DE SISTEMAS .....</b>	<b>95</b>
7.1	Definições .....	95
7.2	Controladores auto-operados .....	96
7.3	Controle on-off.....	96
7.4	Controladores proporcionais (P) .....	98
7.5	Controlador proporcional-derivativo (PD).....	101
7.6	Controladores integrais (I) .....	104
7.7	Controlador proporcional-integral (PI) .....	106
7.8	Controlador proporcional-integral-derivativo (PID).....	108
7.9	Exercícios.....	111
<b>APÊNDICE A</b> .....	<b>117</b>	
A-1 Alfabeto Grego .....	117	

## 1 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Neste capítulo serão abordados alguns conceitos necessários à compreensão e o estudo de controle de sistemas. Serão revistos a terminologia empregada, os conceitos de sistemas, a linearização de sistemas não-lineares, uma revisão de números complexos, de séries convergentes com infinitos termos, funções descontínuas no tempo e as soluções de equações diferenciais de sistemas lineares.

### 1.1 Noções básicas de sistemas

**Sistemas** são conjuntos de componentes que atuam juntos realizando determinada finalidade. Um sistema pode ser constituído de sub-sistemas, e pode também ser parte de um sistema maior.

O **estado** de um sistema é o conjunto de valores necessários e suficientes que permitem saber, a cada instante, a configuração e a situação atual de todo ele. Por exemplo, para controlar a temperatura de uma câmara frigorífica é necessário que esta temperatura esteja disponível para o controlador, de tal forma que ele possa aumentá-la quando a câmara estiver muito fria ou reduzi-la se estiver quente. A temperatura (e tudo o mais que for necessário) constitui uma das variáveis de estado deste sistema. O estado de um sistema é caracterizado, portanto, pelas suas **variáveis de estado**.

**Sistemas dinâmicos** são sistemas cujas variáveis de estado variam no tempo, segundo leis físicas que podem ser modeladas matematicamente.

Uma **planta** é também um conjunto de componentes, ou parte de uma máquina, ou uma máquina como um todo, com a finalidade de desempenhar uma determinada operação. Uma planta necessariamente não engloba o equipamento que efetua o seu controle, enquanto que um sistema pode representar ambos. A Figura 1.1 exemplifica a diferença entre uma planta e um sistema. Em outras palavras, uma planta é um “sistema” que precisa ser controlado. Sob este ponto de vista, a planta pode até conter um controlador interno de um ou mais de seus componentes, mas estes controladores não são vistos externamente.

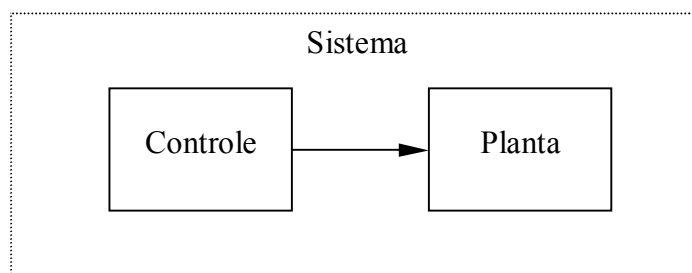


Figura 1.1 - Um sistema pode envolver um controle, que também pode ser considerado um sistema, e a planta a ser controlada.

Uma **perturbação** é um esforço ou sinal que afeta a resposta do sistema ou de uma planta. A perturbação é considerada geralmente na forma aditiva à dinâmica, isto é, sobrepõe-se ao modelo matemático da dinâmica. Contudo, certas perturbações exibem características não aditivas que dependem do estado da planta e atuam de forma não-linear.

**Controle realimentado** ou **controle em malha fechada** é uma operação que reduz a diferença entre a saída (resposta) de um sistema ou planta a uma referência externa pré-estabelecida. Um sistema de controle de temperatura ambiente por meio de um equipamento

de ar-condicionado ou um simples termostato são exemplos de controle realimentado. A Figura 1.2 ilustra a representação gráfica de um controle realimentado. O controlador calcula o sinal de atuação com base na discrepância entre a saída da planta e a referência externa.

**Servo-sistemas** são controladores de posição, velocidade ou de aceleração. Um servo-sistema é composto por um elemento sensor, pela lógica de controle e pelo atuador (de posição, velocidade ou aceleração).

**Reguladores automáticos** são sistemas controladores em malha fechada onde o sinal de referência é constante e não pode ser alterado.

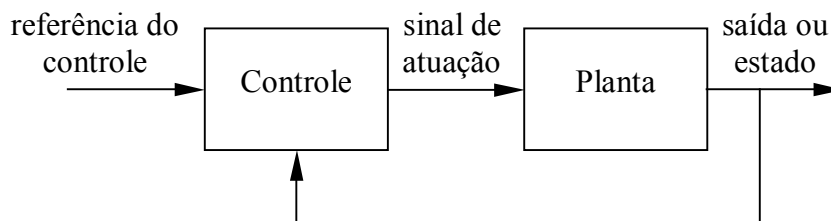


Figura 1.2 – Controle realimentado ou em malha fechada

**Sistemas em malha aberta** ou **controladores em malha aberta** são sistemas no qual o controlador não necessita da informação da saída ou do estado da planta para utilizar no sinal de atuação (ver Figura 1.3).

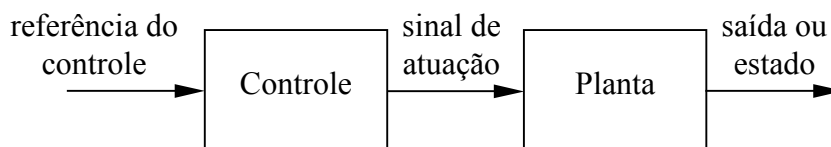


Figura 1.3 – Representação do controle em malha aberta

**Modelos de sistemas** são representações que permitem estabelecer relações entre causa e efeito de sistemas dinâmicos. Os modelos podem ser físicos ou matemáticos. **Modelos físicos** assemelham-se a sistemas reais, porém são mais simples, mantendo as características mais importantes. Os **modelos matemáticos** procuram representar o comportamento dinâmico dos sistemas por meio de equações matemáticas (equações de derivadas, equações de diferenças). Pode-se prever o comportamento dinâmico de uma planta pela análise do seu modelo físico ou matemático. Por exemplo, seja o sistema dinâmico mostrado na Figura 1.4, composto por uma massa  $m$ , uma mola de coeficiente  $k$  e um amortecedor com coeficiente de amortecimento  $b$ . Este sistema, que se desloca na vertical, pode representar um sistema de suspensão de um veículo. A equação matemática que descreve o movimento do conjunto em função do deslocamento  $x_o$  da massa e da extremidade do amortecedor e mola,  $x_i$ , é também mostrada na figura.

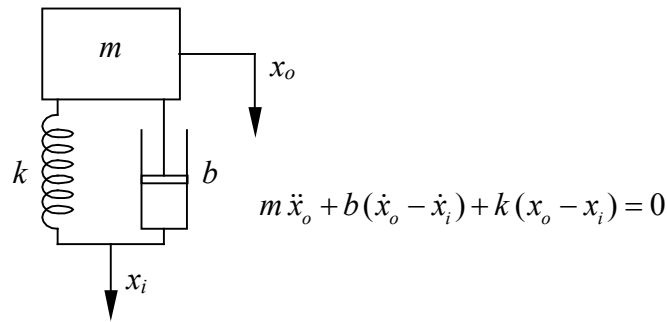


Figura 1.4 – Um sistema composto por uma massa, mola e amortecedor pode representar a suspensão de um veículo.

O diagrama mostrado Figura 1.5 ilustra os diferentes tipos de sistemas e os modelos matemáticos utilizados na sua representação. **Sistemas dinâmicos estocásticos** possuem um comportamento imprevisível, e portanto não podem ser modelados. Um ruído é um exemplo de uma dinâmica estocástica. **Sistemas determinísticos**, ao contrário, possuem uma dinâmica previsível que pode ser modelada matematicamente. Se o sistema for determinístico, ele pode ser modelado por parâmetros concentrados ou distribuídos. **Sistema a parâmetros concentrados** significa que, dado as condições do sistema num instante, é possível prever a sua condição em qualquer instante. Já com **parâmetros distribuídos**, o estado é uma função de outros parâmetros. Um exemplo de um sistema com parâmetros concentrados é o sistema massa-mola-amortecedor mostrado na Figura 1.4. Este tipo de sistema é descrito por uma equação diferencial no tempo ( $df/dt$ ). A distribuição de temperatura numa placa aquecida, por sua vez, é um sistema com parâmetros distribuídos, uma vez que a temperatura em cada ponto depende da posição onde é medida e do tempo. Sistemas a parâmetros distribuídos são governados por equações diferenciais parciais ( $\partial f/\partial x$ ). Quando o sistema possuir parâmetros concentrados, ele poderá ser modelado por funções contínuas ou discretas no tempo. **Sistemas discretos** são aqueles que assumem valores apenas em determinados instantes de tempo. Eles podem, eventualmente, ser modelados por funções contínuas. A propriedade discreta pode tanto estar no próprio sistema quanto na forma de se medir o sistema. Se a medição for discreta, a intervalos regulares no tempo, este sistema é considerado discreto. Exemplos de sistema discretos são: o número de habitantes contaminados a cada ano pelo vírus da gripe, a temperatura máxima do dia observada durante um ano num dado local, etc.

Se um sistema dinâmico contínuo for simulado num computador, ele passa a ser discreto, uma vez que é impossível obter o valor do estado a cada instante de tempo, mas somente nos pontos calculados pelo computador. Na prática, porém, considera-se que o cálculo efetuado pelo computador é preciso o suficiente para que o sistema possa ser admitido como contínuo.

**Sistemas contínuos** no tempo são aqueles nos quais é possível conhecer o estado a qualquer instante de tempo. Dentro de sistemas contínuos, o comportamento dinâmico pode ser linear ou não linear. **Sistemas lineares** são descritos por equações lineares (definidas logo a seguir) que se assemelham à equação de uma reta, ao passo que **sistemas não lineares** possuem termos com o quadrado, ou o cubo, ou o seno ou ainda a função exponencial das variáveis de estado. Se o sistema for linear, os coeficientes da equação linear podem ser constantes (**sistema a parâmetros constantes**) ou então variar lentamente no tempo (**sistemas variantes no tempo**). Se os coeficientes variam rapidamente no tempo, é muito provável que este sistema não seja linear. Exemplos de sistemas com parâmetros variantes no tempo são aeronaves e foguetes. Neles, a massa do veículo varia conforme o combustível é consumido, e as características dinâmicas sofrem influência desta variação. Finalmente, os

sistemas podem ainda depender de apenas uma ou de mais de uma variável de estado. No primeiro caso tem-se os **sistemas monovariáveis** e, no segundo, tem-se **sistemas multivariáveis**. A Figura 1.4 mostra um exemplo de sistema monovariável. Porém, o conjunto completo de suspensão de um veículo seria um sistema multivariável, já que dependeria do número de rodas presentes no veículo. Para cada roda, acrescenta-se uma equação a mais no modelo matemático e, portanto, mais uma variável de estado.

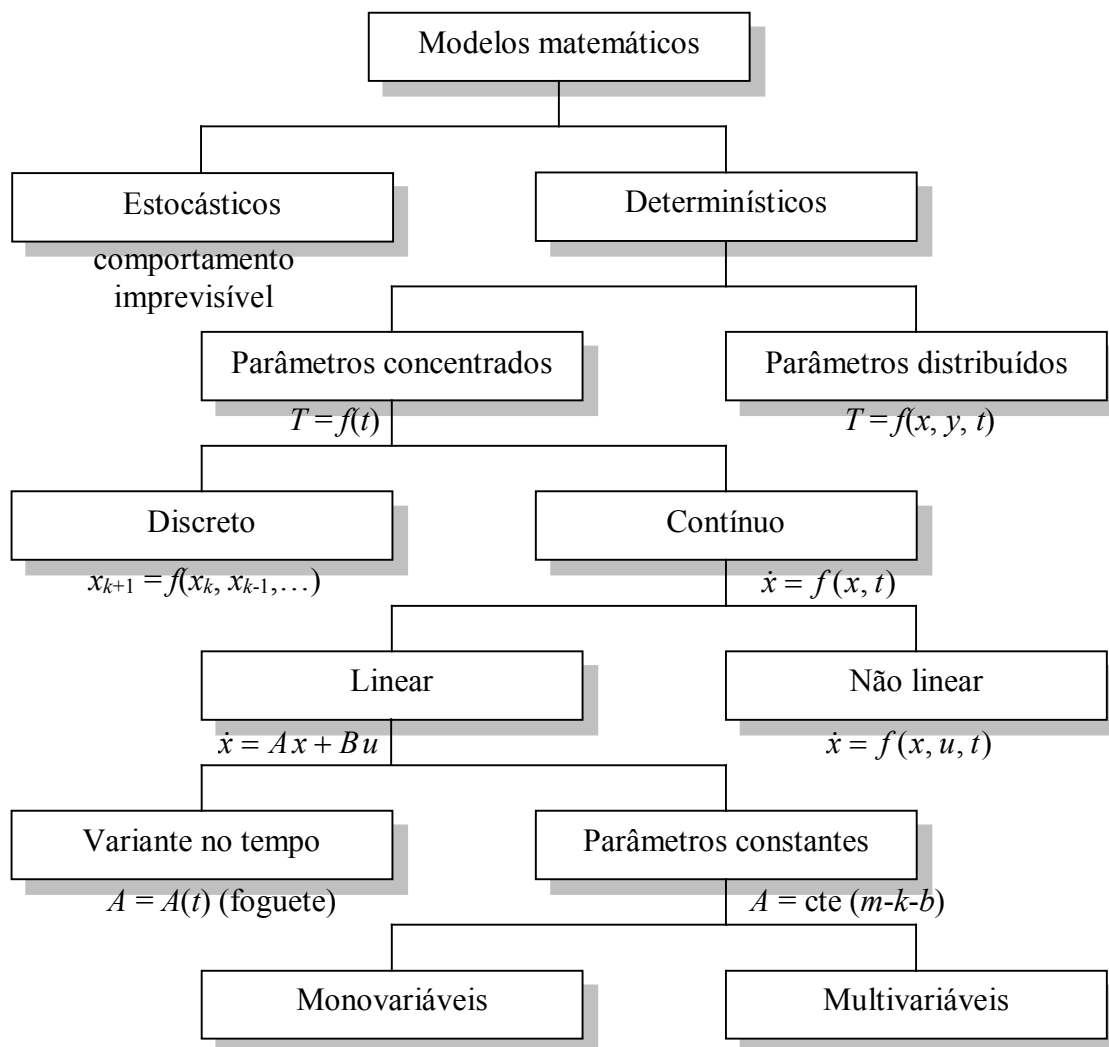


Figura 1.5 – Sistemas dinâmicos e sua representação por modelos matemáticos

Serão utilizados aqui apenas modelos matemáticos, uma vez que eles permitem efetuar a análise do comportamento dinâmico dos sistemas, bem como sua **controlabilidade**, isto é, a verificação se estes sistemas podem ou não ser controlados e como deve ser este controle. Além disso, serão abordados sistemas lineares na quase totalidade do curso, principalmente em virtude de que a teoria de controle moderna deriva exclusivamente de sistemas lineares. Um sistema  $y = H(x)$  é linear se obedece à relação:

$$H(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha H(x_1) + \beta H(x_2) = \alpha y_1 + \beta y_2 \quad (1.1)$$

Seja, por exemplo, a equação diferencial ordinária de 2ª ordem  $y = m\ddot{x} + b\dot{x} + kx$ . Esta equação é linear, pois se  $x = x_1 + x_2$ , então

$$y = m \ddot{x} + b \dot{x} + k x = m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + b(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + k(x_1 + x_2) = m \ddot{x}_1 + b \dot{x}_1 + k x_1 + m \ddot{x}_2 + b \dot{x}_2 + k x_2 \quad (1.2)$$

de onde se conclui que

$$y = y_1 + y_2 \quad (1.3)$$

Nem todos os sistemas físicos reais são lineares. Na verdade, a grande maioria deles é não linear até um certo grau. Isto não significa que a teoria de controle de sistemas lineares não possa ser aplicada a sistemas não lineares, mas sim que se deve proceder a uma **linearização** (quando possível) do sistema a fim de tornar o controle menos suscetível às não linearidades. Infelizmente nem sempre esta prática resulta num sistema controlável.

## 1.2 Linearizações de sistemas não lineares

O comportamento de sistemas não lineares pode ser aproximado por meio de um sistema linear equivalente, em torno de uma região pequena de operação. Dado então um modelo não linear, o modelo linearizado é obtido por expansão em série de Taylor da dinâmica, e considera-se nesta expansão apenas o termo constante e o termo de primeiro grau. Se  $y = f(x)$  representar uma dinâmica não linear, então a expansão em série de Taylor desta função fornece:

$$y \cong f(x_o) + \frac{df}{dx}(x_o)(x - x_o) + \frac{1}{2} \frac{d^2f}{dx^2}(x_o)(x - x_o)^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3f}{dx^3}(x_o)(x - x_o)^3 + \dots \quad (1.4)$$

Se, contudo, a função depender de mais de uma variável, como por exemplo  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , então a série de Taylor com termos até o primeiro grau, em torno do ponto  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  fica:

$$y \cong f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)(x_1 - \bar{x}_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)(x_n - \bar{x}_n). \quad (1.5)$$

O valor  $f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  é conhecido como “ponto de operação”. A aproximação da série de Taylor é válida, portanto, numa pequena região em torno do ponto de operação.

Quase todos os sistemas dinâmicos exibem alguma não linearidade. Felizmente, também quase todos podem ser aproximados por meio de equações lineares. Alguns exemplos destes sistemas são fornecidos a seguir.

**Exemplo 1.1** – O arrasto aerodinâmico em um veículo (atrito do ar que tende a deter seu movimento), mostrado esquematicamente na Figura 1.6, é modelado matematicamente em função da velocidade  $\dot{x}$  por:

$$F_a = \frac{1}{2} \rho C_d A \dot{x}^2$$

onde  $\rho$  é a densidade do ar,  $C_d$  é o coeficiente de atrito, e  $A$  é a área frontal do veículo. O atrito aumenta, portanto, com o quadrado da velocidade. Logo, tem-se um comportamento não linear desta força. A linearização da força em torno do ponto de operação  $\bar{v}$  leva a

$$F_a \cong \frac{1}{2} \rho C_d A \bar{v}^2 + \rho C_d A \bar{v} (v - \bar{v}) = \frac{1}{2} \rho C_d A \bar{v} (2v - \bar{v})$$

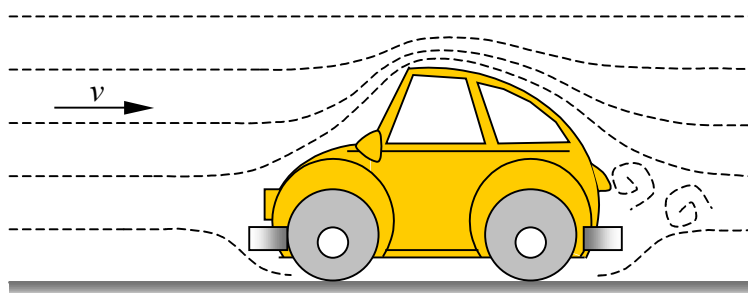


Figura 1.6 – Arrasto aerodinâmico de um veículo em movimento.

Exemplo 1.2 – O movimento de um pêndulo simples, mostrado na Figura 1.7, pode ser obtido pelo equilíbrio dos momentos que atuam nele, ou seja:

$$\tau(\theta) = m l^2 \ddot{\theta} + m g l \sin \theta = 0$$

Uma vez que  $\sin \theta$  não é linear, pode-se então linearizar a equação em torno do ponto de operação  $\theta = 0$ , que resulta:

$$\tau(\theta) \cong \tau(0) + \frac{\partial \tau}{\partial \theta}(0) = m l^2 \ddot{\theta} + m g l \cos(0) \theta,$$

e finalmente

$$\tau(\theta) \cong m l^2 \ddot{\theta} + m g l \theta.$$

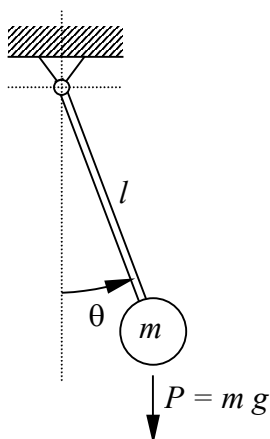


Figura 1.7 – Movimento de um pêndulo simples

Os sistemas lineares ocupam lugar de grande destaque na análise e no estudo de controladores. Sistemas lineares invariantes no tempo (parâmetros constantes) são descritos matematicamente por equações diferenciais ordinárias, e portanto a análise destas equações diferenciais fornece informações sobre a controlabilidade de sistemas.



Antes porém de apresentar-se os sistemas dinâmicos lineares, convém efetuar-se uma pequena recordação de números complexos, séries infinitas e de funções descontínuas no tempo, que serão vistos nas próximas seções.

### 1.3 Números complexos

Números complexos surgem em decorrência da solução de equações algébricas na forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0. \quad (1.6)$$

Pode-se mostrar que se  $n$  for ímpar, uma das raízes é real. Além disso, se houver raízes complexas, então elas aparecem aos pares, formando pares conjugados. As raízes complexas surgem quando na solução da equação aparece a raiz quadrada de um número negativo. Seja, por exemplo, a equação do 2º grau:

$$a x^2 + b x + c = 0, \quad (1.7)$$

cujas raízes são:

$$x_i = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad i = 1, 2 \quad (1.8)$$

Se o valor sob a raiz for negativo, isto é, se  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ , então esta equação não possui raízes reais, mas sim duas raízes complexas conjugadas, dadas por:

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a} \mathbf{j}, \quad \text{e} \quad x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a} \mathbf{j}, \quad (1.9)$$

onde  $\mathbf{j}$  é a **base dos números complexos**, e vale  $\mathbf{j} = \sqrt{-1}$ . Um número complexo  $z = x + y \mathbf{j}$  pode ser entendido como um ponto num plano, já que possui duas coordenadas independentes, ou seja  $z = (x, y)$ , com  $z \in \mathbb{C}$  (conjunto dos números complexos), e  $x$  e  $y \in \mathbb{R}$  (conjunto dos números reais).  $x$  é denominado de **parte real**:

$$x = \text{Re}(z), \quad (1.10)$$

e  $y$  é a **parte imaginária** do número complexo:

$$y = \text{Im}(z). \quad (1.11)$$

O **conjugado** de um número complexo é também um número complexo no qual a parte imaginária troca de sinal com relação ao número complexo original. Representa-se o conjugado de um número complexo por uma barra sobre o símbolo da variável. Assim, se  $z = x + y \mathbf{j}$  for um número complexo, seu conjugado é dado por  $\bar{z} = x - y \mathbf{j}$ . É claro que o conjugado do conjugado é o próprio número complexo, isto é  $z = \overline{\bar{z}}$ . A soma de um número complexo com seu conjugado resulta num número real:

$$z + \bar{z} = x + y \mathbf{j} + x - y \mathbf{j} = 2x. \quad (1.12)$$

Da mesma forma, a diferença de um número complexo e seu conjugado resulta num número imaginário puro:

$$z - \bar{z} = x + y \mathbf{j} - x + y \mathbf{j} = 2y \mathbf{j}. \quad (1.13)$$

O conjugado da soma de dois números complexos é igual à soma dos conjugados:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad (1.14)$$

O conjugado de um produto entre dois números complexos é também igual ao produto dos conjugados:

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad (1.15)$$

e o conjugado do inverso de um número complexo é igual ao inverso do conjugado:

$$\overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1}. \quad (1.16)$$

Segue, da definição de base complexa, que  $\mathbf{j}^2 = -1$ ,  $\mathbf{j}^3 = -\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{j}^4 = 1$ ,  $\mathbf{j}^5 = \mathbf{j}$ , e assim em diante. Igualmente, tem-se também pela definição, que  $1/\mathbf{j} = -\mathbf{j}$ , bastando que se multiplique o numerador e o denominador por  $\mathbf{j}$  para se provar a identidade. Logo, o produto de dois números complexos é também um número complexo, pois:

$$\begin{aligned} z &= (x_1 + y_1 \mathbf{j})(x_2 + y_2 \mathbf{j}) = x_1x_2 + (x_1y_2 + x_2y_1)\mathbf{j} + y_1y_2 \mathbf{j}^2 = \\ &= x_1x_2 - y_1y_2 + (x_1y_2 + x_2y_1)\mathbf{j} \end{aligned} \quad (1.17)$$

e o produto de um número complexo pelo seu conjugado é um número real:

$$z = (x_1 + y_1 \mathbf{j})(x_2 - y_2 \mathbf{j}) = x_1x_2 - y_1y_2 \mathbf{j}^2 = x_1x_2 + y_1y_2 \quad (1.18)$$

Igualmente, a razão de números complexos também pode ser reduzida a um número complexo bastando que se multiplique o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador:

$$z = \frac{x_1 + y_1 \mathbf{j}}{x_2 + y_2 \mathbf{j}} = \frac{x_1 + y_1 \mathbf{j}}{x_2 + y_2 \mathbf{j}} \frac{x_2 - y_2 \mathbf{j}}{x_2 - y_2 \mathbf{j}} = \frac{x_1x_2 - y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_1y_2 + x_2y_1}{x_2^2 + y_2^2} \mathbf{j} = a + b \mathbf{j} \quad (1.19)$$

Com isso tem-se que qualquer número na forma:

$$z = \frac{a_n \mathbf{j}^n + a_{n-1} \mathbf{j}^{n-1} + \dots + a_2 \mathbf{j}^2 + a_1 \mathbf{j} + a_0}{b_m \mathbf{j}^m + b_{m-1} \mathbf{j}^{m-1} + \dots + b_2 \mathbf{j}^2 + b_1 \mathbf{j} + b_0} \quad (1.20)$$

pode ser reduzido a um número complexo  $z = x + y \mathbf{j}$ . De fato, qualquer polinômio em  $\mathbf{j}$  pode ser reduzido a um número complexo com parte real e parte imaginária, uma vez que potências da base complexa podem ser reduzidas a um número real ou imaginário puro, como mostrado no exemplo a seguir.

**Exemplo 1.3** – Simplificar o número complexo dado por

$$z = \frac{\mathbf{j}^3 + 2\mathbf{j}^2 - 4\mathbf{j} + 3}{3\mathbf{j}^2 - \mathbf{j} + 4}$$

Solução:

Primeiramente simplifica-se o numerador e o denominador do número complexo por meio da definição de potência da base complexa, ou seja,  $\mathbf{j}^2 = -1$  e  $\mathbf{j}^3 = -\mathbf{j}$ . Tem-se então que:

$$z = \frac{-\mathbf{j} - 2 - 4\mathbf{j} + 3}{-3 - \mathbf{j} + 4} = \frac{1 - 5\mathbf{j}}{1 - \mathbf{j}}$$

Em seguida, multiplica-se o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador, o que resulta:

$$z = \frac{1 - 5\mathbf{j}}{1 - \mathbf{j}} \frac{1 + \mathbf{j}}{1 + \mathbf{j}} = \frac{1 - 4\mathbf{j} - 5\mathbf{j}^2}{2} = \frac{6 - 4\mathbf{j}}{2} = 3 - 2\mathbf{j}$$

Números complexos podem ser postos em coordenadas polares ( $r, \theta$ ), na forma:

$$z = r(\cos \theta + \mathbf{j} \operatorname{sen} \theta) = r e^{j\theta} \quad (1.21)$$

A prova da expressão acima é dada na próxima seção.

#### 1.4 Séries de funções com infinitos termos

A relação apresentada na seção anterior, e repetida aqui

$$z = r(\cos \theta + \mathbf{j} \operatorname{sen} \theta) = r e^{j\theta} \quad (1.22)$$

é, de certa forma, de difícil compreensão. Afinal, o que significa a função exponencial de um número complexo? Sabe-se, por exemplo, que  $e^1 = 2.718282\dots$  onde “e” é a base dos logaritmos neperianos, mas como avaliar a exponencial de um número imaginário, ou  $e^{\mathbf{j}}$ , ou ainda  $e^{\sqrt{-1}}$ ? Para obter este resultado e alguns outros, recorre-se à expansão de funções em séries infinitas. Ao aplicar-se a série de Taylor à função exponencial em torno do ponto  $x = 0$ , tem-se que:

$$e^x \approx e^0 + \frac{d e^x}{dx}(0)(x-0) + \frac{1}{2} \frac{d^2 e^x}{dx^2}(0)(x-0)^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3 e^x}{dx^3}(0)(x-0)^3 + \dots \quad (1.23)$$

É conveniente ressaltar que o símbolo “!” indica o fatorial de um número, isto é, o produto deste número por todos os inteiros positivos menores do que ele:  $n! = n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$ . Uma vez que a derivada da função exponencial é igual a ela própria, todas as derivadas acima resultam iguais a 1 e a série fica:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \quad (1.24)$$

Pode-se mostrar que esta função, e também as séries do seno e do co-seno são convergentes, isto é, a cada novo termo calculado da série, a função tende para seu valor real, isto é:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \quad (1.25)$$

e portanto

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} \quad (1.26)$$

As funções seno e co-seno de  $x$  podem igualmente ser expandidas em séries infinitas em torno do ponto  $x = 0$ , resultando, respectivamente:

$$\text{sen } x = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots \quad (1.27)$$

e

$$\text{cos } x = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots \quad (1.28)$$

Nota-se que a série do seno possui apenas expoentes ímpares, enquanto que a série do co-seno possui apenas expoentes pares. Além disso, pode-se mostrar que a derivada destas séries resultam formas corretas, ou seja:

$$\frac{d e^x}{dt} = \frac{d}{dx} \left( 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = e^x, \quad (1.29)$$

$$\frac{d \text{sen } x}{dx} = \frac{d}{dx} \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \text{cos } x \quad (1.30)$$

e

$$\frac{d \text{cos } x}{dx} = \frac{d}{dx} \left( 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \right) = -x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \dots = -\text{sen } x \quad (1.31)$$

A partir da definição da função exponencial em termos de uma série de fatores infinita, para avaliar agora a exponencial de um número complexo basta fazer

$$e^j \approx 1 + j + \frac{j^2}{2} + \frac{j^3}{3!} + \frac{j^4}{4!} + \frac{j^5}{5!} + \dots \quad (1.32)$$

Porém, sabe-se que  $j^2 = -1$ ,  $j^3 = -j$ ,  $j^4 = 1$ ,  $j^5 = j$ , ..., ou seja

$$j^{4k+i} = \begin{cases} 1, & \text{para } i = 0 \\ j, & \text{para } i = 1 \\ -1, & \text{para } i = 2 \\ -j, & \text{para } i = 3 \end{cases}, \text{ para } k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.33)$$

e substituindo estes resultados na função exponencial, tem-se

$$\begin{aligned} e^j &= 1 + j - \frac{1}{2} - \frac{j}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{j}{5!} - \frac{1}{6!} - \frac{j}{7!} + \dots = \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \dots + j \left( 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \dots \right) \end{aligned} \quad (1.34)$$

que é um número complexo. A exponencial de um número complexo  $z = x + yj$  pode ser avaliada agora como

$$e^{x+yj} = e^x e^{yj} \approx e^x \left( 1 + yj + \frac{y^2 j^2}{2} + \frac{y^3 j^3}{3!} + \frac{y^4 j^4}{4!} + \frac{y^5 j^5}{5!} + \dots \right), \quad (1.35)$$

ou ainda

$$e^{x+yj} \approx e^x \left[ 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \frac{y^8}{8!} + \dots + j \left( y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \frac{y^9}{9!} \dots \right) \right]. \quad (1.36)$$

Vê-se, porém, que a parte real é uma série de co-seno e a parte imaginária é uma série de seno, o que leva a

$$e^{x+yj} = e^x (\cos y + j \operatorname{sen} y). \quad (1.37)$$

Este conceito leva à famosa equação de Euler, tida por muitos como a mais bela fórmula matemática, dada a sua simplicidade:

$$e^{j\pi} = -1 \quad (1.38)$$

Pode-se agora calcular a exponencial do conjugado de  $z$ , que vale:

$$e^{x-yj} = e^x (\cos y - j \operatorname{sen} y). \quad (1.39)$$

Se a parte real do número complexo for nula, então as exponenciais do complexo e de seu conjugado ficam:

$$\begin{aligned} e^{yj} &= \cos y + j \operatorname{sen} y \\ e^{-yj} &= \cos y - j \operatorname{sen} y \end{aligned} \quad (1.40)$$

A adição de ambas as expressões permite obter o valor do co-seno, enquanto que a subtração permite calcular o seno:

$$\cos y = \frac{1}{2} (e^{yj} + e^{-yj}) \quad (1.41)$$

e

$$\operatorname{sen} y = \frac{1}{2j} (e^{yj} - e^{-yj}) = -\frac{j}{2} (e^{yj} - e^{-yj}) \quad (1.42)$$

Estas duas expressões serão utilizadas adiante para calcular a transformada de Laplace das funções seno e co-seno.

## 1.5 Funções descontínuas no tempo

Na solução de problemas dinâmicos, é freqüente encontrar-se situações nas quais um sistema sofre um impacto, ou uma ação descontínua no tempo, ou um impulso. Exemplos de tais ações são: o choque entre duas bolas (impulso) no qual a força exercida no contacto é alta e a duração da ação é curta, e o brusco acionamento de um sistema elétrico ao ligar-se a chave de alimentação. Tais ações são consideradas descontínuas no tempo, pois assumem valores

diferentes em instantes de tempo muito próximos entre si. No mundo real macroscópico, contudo, não existem descontinuidades, pois a cada instante pode ser determinado o valor exato da ação. Matematicamente, porém, é conveniente considerá-las descontínuas, uma vez que é muito difícil estabelecer quais os limites do impulso e da duração do evento. Define-se, com isso, algumas funções típicas que caracterizam eventos descontínuos no tempo. Estas funções são: a função degrau, a função impulso e a função rampa.

a) Função degrau unitário

A **função degrau unitário** corresponde a uma ação que modifica instantaneamente uma determinada condição, ou variável, de um sistema, como a posição, ou a velocidade, ou a carga elétrica num capacitor, ou a vazão em uma tubulação, a ativação elétrica de um circuito, ou ainda o início da ação de uma força, por exemplo. A função degrau unitário é definida como

$$\mathbf{1}(t) \triangleq \begin{cases} 0, & \text{para } t < 0 \\ 1, & \text{para } t \geq 0 \end{cases} \quad (1.43)$$

cujo gráfico é mostrado na Figura 1.8.

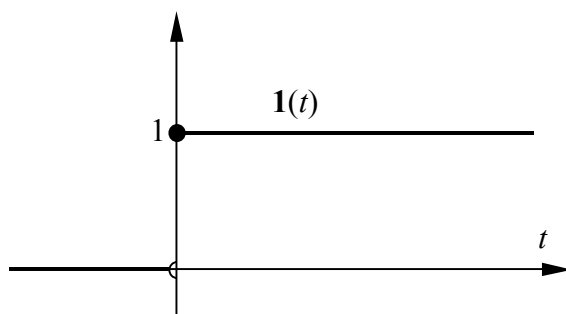


Figura 1.8 – Função degrau unitário.

b) Função impulso unitário

A **função impulso unitário** corresponde a uma ação que age sobre um sistema durante um intervalo infinitesimal de tempo, ou seja, ela atua por um pequeno intervalo de tempo e depois cessa a atuação. Esta função é também conhecida como função “delta de Dirac”. Na função impulso unitário a potência e a energia despendidas na ação são limitados, porém a ação não é. Isto se deve ao fato de que o intervalo de tempo que dura o acionamento é muito pequeno, e tende a zero, fazendo com que a força neste intervalo tenda a infinito. Um bom exemplo da aplicação de um impulso unitário é no choque entre duas partes mecânicas. A função impulso unitário é definida como:

$$\delta(t) \triangleq \begin{cases} 0, & \text{para } t < 0 \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t}, & \text{para } 0 \leq t < \Delta t \\ 0, & \text{para } t \geq \Delta t \end{cases} \quad (1.44)$$

cujo comportamento é visto na Figura 1.9

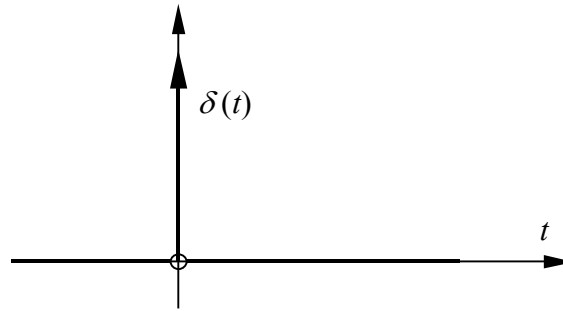


Figura 1.9 – Função impulso unitário.

## c) Função rampa

A **função rampa** corresponde a uma ação que cresce linearmente no tempo, a partir de uma ação nula. Ela é contínua no tempo, porém sua derivada é descontínua na origem. Quando o tempo tende a infinito, o valor da ação na função rampa também tende a infinito. Na prática isto não ocorre, uma vez que não se consegue gerar ações de intensidade infinita. A função rampa é definida por:

$$\rho(t) \triangleq \begin{cases} 0, & \text{para } t < 0 \\ t, & \text{para } t \geq 0 \end{cases} \quad (1.45)$$

com comportamento visto na Figura 1.10.

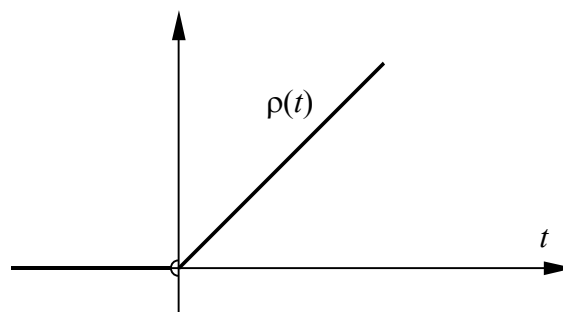


Figura 1.10 – Função rampa.

As funções degrau unitário, impulso unitário e rampa são utilizadas nas transformadas de Laplace, pois permitem obter a solução de um sistema sujeito a ações descontínuas no tempo.

### 1.6 Equações diferenciais ordinárias a coeficientes constantes.

Um sistema dinâmico linear invariante no tempo  $y(t)$  é modelado por uma equação diferencial na forma:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x \quad (1.46)$$

onde  $x(t)$  é conhecido como **entrada do sistema**, ou então por **termo forçante**,  $y(t)$  constitui a **saída do sistema** ou **variável de estado** e  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) e  $b_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) são constantes. Se o termo forçante for nulo, então a equação diferencial resultante,

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = 0, \quad (1.47)$$

é denominada de **equação homogênea**.

A solução da equação diferencial é composta por uma combinação linear das  $n$  soluções da equação homogênea, adicionada a uma solução (conhecida como “**solução particular**”) da equação diferencial completa. Assim tem-se

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \dots + c_n y_n(t) + y_p(t) \quad (1.48)$$

onde cada  $y_i(t)$  é uma das soluções da equação homogênea e  $y_p(t)$  é uma solução particular (pode haver mais de uma solução particular). Pode-se mostrar, sem muita dificuldade, que as soluções da equação homogênea são dadas por:

$$y_i(t) = \alpha_i e^{\lambda_i t}, \quad (1.49)$$

tal que  $\alpha_i$  e  $\lambda_i$  são constantes que dependem da equação homogênea. De fato, substituindo esta solução na equação homogênea, tem-se

$$a_n \alpha_i \lambda_i^n e^{\lambda_i t} + a_{n-1} \alpha_i \lambda_i^{n-1} e^{\lambda_i t} + \dots + a_1 \alpha_i \lambda_i e^{\lambda_i t} + a_0 \alpha_i e^{\lambda_i t} = 0, \quad (1.50)$$

que pode ser reescrita como

$$a_n \lambda_i^n + a_{n-1} \lambda_i^{n-1} + \dots + a_1 \lambda_i + a_0 = 0. \quad (1.51)$$

A equação acima é uma equação algébrica de ordem  $n$  que irá gerar as  $n$  raízes, ou  $n$  soluções  $\lambda_i$  da equação diferencial homogênea. Esta equação é conhecida como **equação característica** da equação homogênea. Esta equação será estudada adiante, quando forem vistas as funções de transferência de sistemas lineares.

A solução da equação homogênea é então dada por

$$y_h(t) = \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i e^{\lambda_i t} \quad (1.52)$$

mas como não há como obter separadamente os valores de  $c_i$  e de  $\alpha_i$ , então fazendo  $b_i = c_i \alpha_i$  a solução da equação homogênea fica

$$y_h(t) = \sum_{i=1}^n b_i e^{\lambda_i t} \quad (1.53)$$

Pode-se agora calcular os valores de  $b_i$  a partir das  $n$  **condições iniciais**, que informam qual é o estado do sistema no instante  $t = 0$ . As condições iniciais estabelecem restrições não apenas ao valor de  $y$ , mas também ao valor de suas derivadas temporais. Num sistema mecânico, por exemplo, as condições iniciais seriam a posição ocupada pelo sistema no instante inicial, sua velocidade e, eventualmente, também sua aceleração. Estas condições levam a um sistema de  $n$  equações lineares a  $n$  incógnitas:



$$\sum_{i=1}^n b_i = y(0) - y_p(0)$$

...

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^n b_i = \frac{d^n y}{dt^n}(0) - \frac{d^n y_p}{dt^n}(0) \tag{1.54}$$

que permitem determinar todos os coeficientes  $b_i$ .

**Exemplo 1.4** – Se o termo forçante for uma função não linear, descontínua ou transcendente (por exemplo,  $f(t) = t + \text{sen}t$ ), pode não existir uma solução geral para a equação diferencial. Porém, a solução da equação homogênea é sempre possível, caso esta seja linear. Seja, por exemplo, o sistema mecânico formado por uma massa e uma mola, como mostrado na Figura 1.11. Busca-se uma solução para o movimento da massa sujeita a uma força  $f(t)$ , tal que no instante  $t = 0$ , a massa está na posição  $x(0) = x_0$ , e com velocidade  $\dot{x}(0) = 0$ .

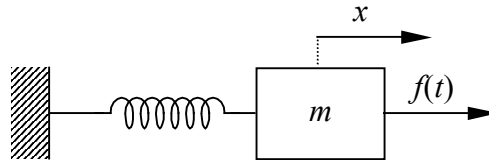


Figura 1.11 – Sistema mecânico massa-mola sujeito à ação da força  $f(t)$

A equação diferencial que governa o movimento é dada pelo equilíbrio de forças na massa  $m$ , ou seja:

$$f(t) = m\ddot{x} + kx$$

A equação homogênea é dada por

$$m\ddot{x} + kx = 0,$$

que escrita na forma

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x,$$

permite concluir que a segunda derivada de  $x(t)$  é proporcional ao próprio  $x(t)$ . Isto leva a solução invariavelmente para uma combinação de seno e co-seno, uma vez que

$$\frac{d^2 \cos \omega t}{dt^2} = -\omega^2 \cos \omega t$$

e, igualmente,

$$\frac{d^2 \text{sen } \omega t}{dt^2} = -\omega^2 \text{sen } \omega t$$

Já foi visto que a solução da equação homogênea de uma equação diferencial linear é dada por uma combinação linear de  $\alpha_i e^{\lambda_i t}$ , onde os  $\lambda_i$  são as raízes da equação característica. Neste exemplo, a equação característica é dada por:

$$m\lambda^2 + k = 0,$$

cujas raízes são dois números complexos e conjugados com parte real nula, uma vez que tanto  $m$  quanto  $k$  são positivos:

$$\lambda_1 = \sqrt{k/m} \mathbf{j}$$

$$\lambda_2 = -\sqrt{k/m} \mathbf{j}$$

A solução da equação homogênea é portanto dada por

$$x(t) = \alpha_1 e^{\omega t \mathbf{j}} + \alpha_2 e^{-\omega t \mathbf{j}},$$

onde  $\omega = \sqrt{k/m}$  e é conhecida como a velocidade angular ou frequência natural de oscilação do sistema. Pode-se agora exprimir a exponencial em função do seno e co-seno, resultando em

$$x(t) = \alpha_1 (\cos \omega t + \mathbf{j} \sin \omega t) + \alpha_2 (\cos \omega t - \mathbf{j} \sin \omega t),$$

ou ainda

$$x(t) = (\alpha_1 + \alpha_2) \cos \omega t + (\alpha_1 - \alpha_2) \mathbf{j} \sin \omega t,$$

Uma vez que  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são constantes, pode-se fazer  $c_1 = \alpha_1 + \alpha_2$  e  $c_2 = \alpha_1 - \alpha_2$ , resultando

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \mathbf{j} \sin \omega t,$$

Antes de prosseguir, será mostrado que  $x(t)$  é realmente solução da equação homogênea. Tomando então a segunda derivada de  $x(t)$ ,

$$\ddot{x}(t) = -c_1 \omega^2 \cos \omega t - c_2 \omega^2 \mathbf{j} \sin \omega t,$$

e substituindo na equação homogênea, tem-se

$$m(-c_1 \frac{k}{m} \cos \omega t - c_2 \frac{k}{m} \mathbf{j} \sin \omega t) + k(c_1 \cos \omega t + c_2 \mathbf{j} \sin \omega t) = 0,$$

ou seja,  $x(t)$  é solução da equação homogênea. As duas constantes  $c_1$  e  $c_2$  podem agora ser determinadas pela aplicação das condições iniciais:

$$x(0) = c_1,$$

e portanto  $c_1 = x_0$ . Da mesma forma,

$$\dot{x}(t) = -c_1 \sin \omega t + c_2 \mathbf{j} \cos \omega t,$$

que resulta

$$\dot{x}(0) = c_2 \mathbf{j},$$

e pela condição inicial tem-se  $c_2 = 0$ . Isto leva a solução da equação homogênea para

$$x(t) = x_0 \cos \omega t,$$

A Figura 1.12 mostra o deslocamento  $x$  da massa em função do tempo. Vê-se que a equação diferencial do pêndulo linearizado (Seção 1.2) é igual ao da massa-mola, e, portanto, possui a mesma solução.

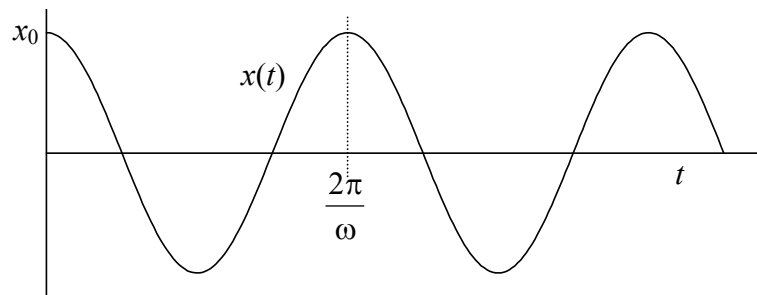


Figura 1.12 – Deslocamento  $x$  do sistema massa-mola em função do tempo.

**Exemplo 1.5** – Considera-se agora um sistema massa-amortecedor, indicado na Figura 1.13, sujeito às condições iniciais: deslocamento  $x(0) = 0$  e velocidade  $\dot{x}(0) = v_0$ .

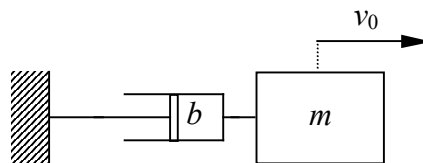


Figura 1.13 – Sistema massa-amortecedor sob condições iniciais não nulas.

Aplicando novamente o equilíbrio de forças na massa  $m$ , tem-se a equação diferencial

$$m \ddot{x} + b \dot{x} = 0$$

Uma vez que este sistema não possui termo forçante, então a equação homogênea coincide com a equação diferencial. Neste caso, admitindo-se novamente que a solução é da forma  $e^{\lambda t}$ , pode-se escrever a equação característica:

$$m \lambda^2 + b \lambda = 0,$$

que indica que o sistema possui duas raízes, das quais uma é nula e a outra vale

$$\lambda = -\frac{b}{m}$$

o que significa que a solução procurada é da forma

$$x(t) = \alpha_1 e^0 + \alpha_2 e^{-bt/m} = \alpha_1 + \alpha_2 e^{-bt/m},$$

Pode-se verificar que  $x(t)$  é solução da equação homogênea, pois

$$\dot{x}(t) = -\frac{b}{m} \alpha_2 e^{-bt/m}$$

e

$$\ddot{x}(t) = \left(\frac{b}{m}\right)^2 \alpha_2 e^{-bt/m}$$

que substituídos na equação homogênea resulta

$$m \left(\frac{b}{m}\right)^2 \alpha_2 e^{-bt/m} - b \frac{b}{m} \alpha_2 e^{-bt/m} = 0$$

As constantes  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  podem agora ser obtidas por meio das condições iniciais:

$$x(0) = \alpha_1 + \alpha_2,$$

e portanto  $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ . A condição da velocidade fornece

$$\dot{x}(0) = -\frac{b}{m} \alpha_2,$$

que resulta

$$\alpha_2 = -\frac{m}{b} v_0,$$

e assim

$$\alpha_1 = \frac{m}{b} v_0.$$

A solução do movimento do sistema é portanto

$$x(t) = v_0 \frac{m}{b} \left(1 - e^{-bt/m}\right),$$

cujo comportamento em função do tempo é mostrado na Figura 1.14

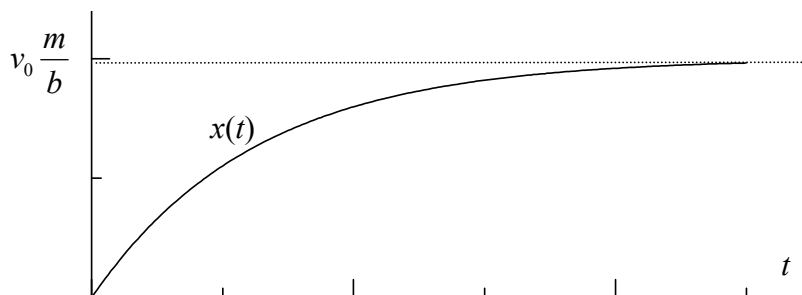


Figura 1.14 – Deslocamento  $x$  do sistema massa-amortecedor em função do tempo.

### 1.7 Movimento harmônico amortecido.

Considera-se agora a equação diferencial de um sistema linear de segunda ordem na forma:

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = f(t) \tag{1.55}$$

Equações semelhantes a esta resultam do movimento mecânico de um sistema massa-mola-amortecedor, bem como de sistemas elétricos e fluidos. Deseja-se estudar o comportamento dinâmico deste sistema quando o termo forçante  $f(t)$  for nulo, ou seja, a solução da equação homogênea. Já foi visto que a solução da equação homogênea de sistemas lineares é dada por

$$y(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (1.56)$$

onde  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são as raízes da equação característica, dada por:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad (1.57)$$

Sabe-se que as raízes de uma equação do segundo grau podem ser reais ou complexas, e, no segundo caso, serão sempre complexas conjugadas. Será visto agora como esta raiz influi no comportamento dinâmico do sistema. As raízes são obtidas pela resolução da equação característica (neste caso do segundo grau), dadas por:

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \text{ e } \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad (1.58)$$

e podem, portanto, ser ambas reais ou complexas conjugadas, dependendo do valor do discriminante  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

a) Duas raízes reais e distintas

Se o discriminante for positivo, então a equação característica apresenta duas raízes reais e distintas. Neste caso o sistema pode apresentar dois tipos de comportamento dinâmico

- Ambas as raízes são negativas ( $\lambda_1 < 0$  e  $\lambda_2 < 0$ ). A solução é dada então por

$$y(t) = \alpha_1 e^{-k_1 t} + \alpha_2 e^{-k_2 t} \quad (1.59)$$

onde  $k_1$  e  $k_2$  são positivos. Esta equação indica que o comportamento do sistema aproxima-se da origem conforme o tempo avança, tendendo a um estado estacionário e constante, conhecido como ponto de equilíbrio, mostrado esquematicamente na Figura 1.15. Um pêndulo fortemente amortecido, isto é, com atrito elevado é um exemplo de um sistema com este comportamento.

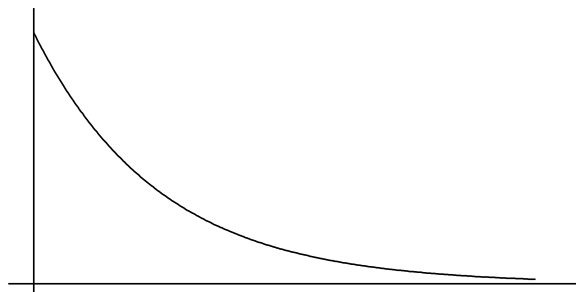


Figura 1.15 – Sistema amortecido.

- Uma ou ambas as raízes são positivas ( $\lambda_1 > 0$ ). A solução é dada então por

$$y(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} \quad (1.60)$$

cujo comportamento é uma exponencial que tende para o infinito (Figura 1.16a). Neste caso o sistema é instável, isto é, não atinge um ponto de equilíbrio. Nota-se que a solução é instável mesmo que uma das raízes seja negativa (estável). Um pêndulo invertido é um exemplo de sistema com comportamento instável. Qualquer desvio com relação ao ponto de equilíbrio (ângulo  $\theta = 0$ , Figura 1.16b) leva o pêndulo a se afastar cada vez mais. É claro que quando o pêndulo aproxima-se do ponto de mínima altura ele torna-se um pêndulo normal, com um ponto de equilíbrio estável. Porém as equações obtidas aqui são linearizadas e portanto não são válidas quando o ângulo  $\theta$  for muito grande.

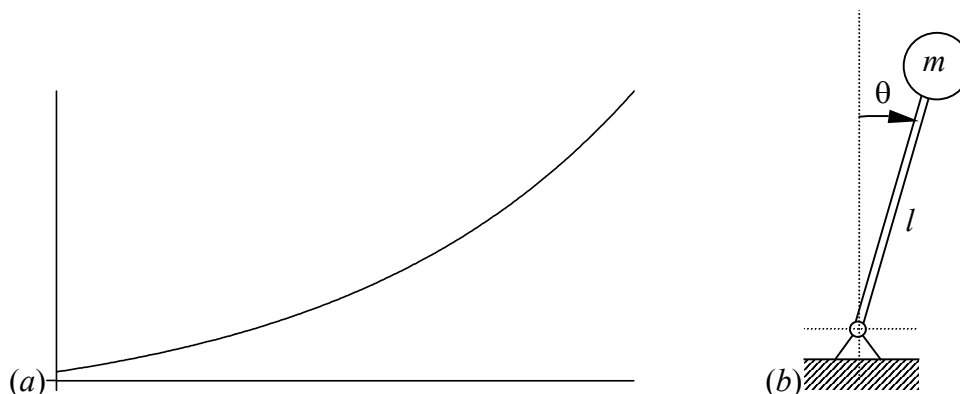


Figura 1.16 – Sistema instável (a) e um pêndulo invertido (b)

b) Uma raiz de multiplicidade dois

Se o discriminante for nulo, então se tem uma raiz dupla, ou de multiplicidade dois. Isto acontece quando a equação característica puder ser posta na forma de um quadrado perfeito:  $(a\lambda + c)^2 = 0$ . Neste caso tem-se um sistema estável se a raiz for negativa (Figura 1.15) ou instável se a raiz for positiva (Figura 1.16).

c) Duas raízes complexas e conjugadas

Se o discriminante for negativo, então surgem duas raízes complexas e conjugadas, na forma  $\lambda_1 = \sigma + \omega\mathbf{j}$ , e  $\lambda_2 = \sigma - \omega\mathbf{j}$ . A solução da equação diferencial é portanto dada por:

$$y(t) = \alpha_1 e^{(\sigma + \omega\mathbf{j})t} + \alpha_2 e^{(\sigma - \omega\mathbf{j})t} \quad (1.61)$$

que pode ser colocada na forma

$$y(t) = (\alpha_1 + \alpha_2) e^{\sigma t} \cos \omega t + \mathbf{j}(\alpha_1 - \alpha_2) e^{\sigma t} \sin \omega t \quad (1.62)$$

Fazendo  $\alpha_1 + \alpha_2 = A$ , e  $(\alpha_1 - \alpha_2)\mathbf{j} = B$ , tem-se então que

$$y(t) = A e^{\sigma t} \cos \omega t + B e^{\sigma t} \sin \omega t \quad (1.63)$$

Nota-se que aparentemente  $B$  é complexo. Contudo, se  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  forem complexos conjugados, então tanto  $A$  quanto  $B$  serão reais. Supondo então que

$$A = C \sin \varphi, \text{ e } B = C \cos \varphi, \quad (1.64)$$

resulta para  $y(t)$

$$y(t) = C e^{\sigma t} \sin(\omega t + \varphi), \quad (1.65)$$

onde  $C$  e  $\varphi$  valem:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \quad (1.66)$$

$$\varphi = \arctan \frac{A}{B} \quad (1.67)$$

O comportamento do sistema depende, agora, do valor da parte real da raiz, ou seja, de  $\sigma$ . Se a parte real for positiva, então o sistema será instável, e a amplitude de oscilação irá aumentar com o tempo, como mostra a Figura 1.17a. Se a parte real for nula, tem-se um sistema oscilatório puro, semelhante àquele mostrado no exemplo 1.3. Se a parte real for negativa, o sistema é estável e amortecido. Com o passar do tempo, ele tende para o repouso em  $y(t) = 0$ , como ilustra a Figura 1.17b.

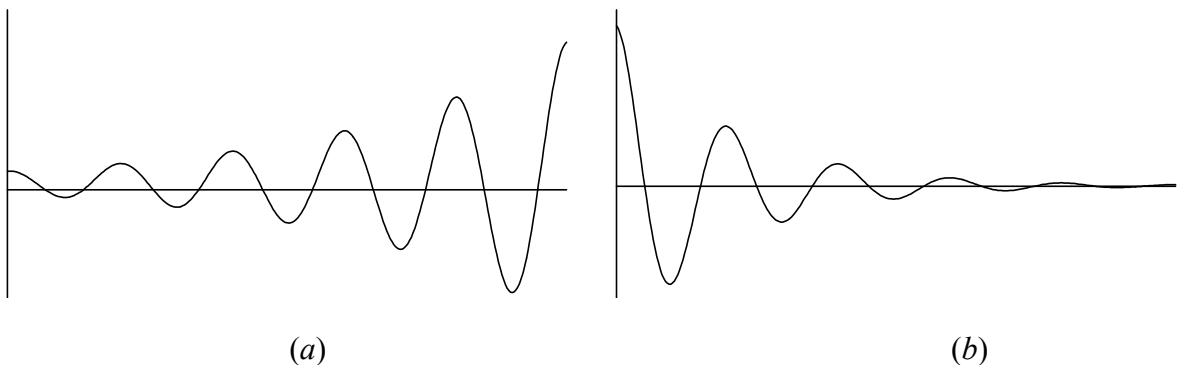


Figura 1.17 – A resposta da equação homogênea de um sistema linear de segunda ordem é um sistema oscilatório instável (a) ou estável (b).

1.8 Exercícios

- 1) Linearizar o sistema composto por um conjunto biela-pistão, mostrado na Figura 1.a, supondo que o ângulo  $\alpha$  fique próximo de  $0^\circ$  e que o comprimento  $h$  da biela seja muito maior do que o raio  $r$  do virabrequim.

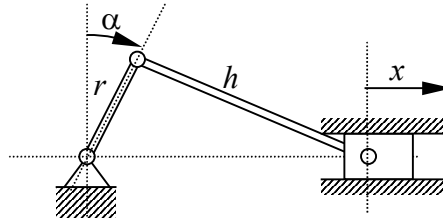


Figura 1.a – Conjunto biela-pistão do exercício 1.

Resposta:

$$x = r \alpha$$

- 2) Simplificar o número complexo:

$$z = \frac{7\mathbf{j}^4 - \mathbf{j}^3 - 4\mathbf{j} - 2}{2\mathbf{j}^4 + \mathbf{j}^3 - 3\mathbf{j}^2 + 3\mathbf{j} - 3}$$

Resposta:

$$z = \frac{5}{8} - \frac{3}{8}\mathbf{j}$$

- 3) Reduzir a função mostrada a seguir a uma única fração

$$G(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+0,5-0,5\sqrt{3}\mathbf{j}} + \frac{1}{s+0,5+0,5\sqrt{3}\mathbf{j}}$$

Resposta:

$$G(s) = \frac{3s^2}{s^3 - 1}$$



## 2 TRANSFORMADA DE LAPLACE

A transformada de Laplace é um operador funcional (isto é, que opera e transforma funções) utilizada para resolver de forma sistemática equações diferenciais lineares que representam sistemas dinâmicos. A transformada de Laplace modifica as funções no tempo  $y(t)$ , passando a representá-las em função de uma variável  $s$  conhecida como **frequência complexa**. A transformada de Laplace da função  $y(t)$  é representada por  $Y(s)$ .

### 2.1 Definição de transformada de Laplace

Por convenção, representa-se a dinâmica em função do tempo com letras minúsculas ( $y(t)$ ,  $x(t)$ ,  $g(t)$ ,  $f(t)$ ), e suas transformadas por letras maiúsculas ( $Y(s)$ ,  $X(s)$ ,  $G(s)$ ,  $F(s)$ ). A transformada de Laplace é definida como

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) \triangleq \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt. \quad (2.1)$$

Nota-se que  $F$  é uma função que depende da variável  $s$  e não mais do tempo  $t$ .  $\mathcal{L}(\cdot)$  representa, por sua vez, o operador da transformada de Laplace. A integração é realizada entre os extremos 0 e  $\infty$ . Para indicar que o limite inferior deve incluir necessariamente o valor zero (e não um valor positivo próximo de zero), indica-se este limite por  $0^-$ . O operador da transformada de Laplace pode ser invertido, isto é, dada a função transformada, pode-se obter a dinâmica em função do tempo por meio de:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \frac{1}{2\pi \mathbf{j}} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} F(s) e^{st} ds \quad (2.2)$$

onde  $\mathbf{j}$  é a base dos números complexos ( $\mathbf{j} = \sqrt{-1}$ ).

### 2.2 Propriedades da transformada de Laplace

A transformada de Laplace apresenta diversas propriedades que são úteis na sua aplicação. Porém estas propriedades não serão demonstradas aqui, e algumas delas sequer serão apresentadas. O leitor deverá buscar na bibliografia material adicional para complementar este estudo. Menciona-se, contudo, que as demonstrações seguem diretamente da definição fornecida acima.

As propriedades mais importantes são:

#### a) Linearidade

Se  $F_1(s) = \mathcal{L}(f_1(t))$  e  $F_2(s) = \mathcal{L}(f_2(t))$ , isto é, se a transformada de Laplace de  $f_1(t)$  for  $F_1(s)$ , e se a transformada de  $f_2(t)$  for  $F_2(s)$ , então

$$\mathcal{L}(\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)) = \alpha_1 F_1(s) + \alpha_2 F_2(s) \quad (2.3)$$

Analogamente, a transformada inversa é também linear pois

$$\mathcal{L}^{-1}(\alpha_1 F_1(s) + \alpha_2 F_2(s)) = \alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) \quad (2.4)$$

#### b) Mudança na escala do tempo

Se a transformada de Laplace de  $f(t)$  for  $F(s)$ , ou  $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ , então

$$\mathcal{L}(f(t/\alpha)) = \alpha F(\alpha s) \quad (2.5)$$

c) Transformada da convolução

A convolução de duas funções do tempo  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$  é definida como sendo uma operação dada por

$$f_1(t) * f_2(t) \triangleq \int_0^{\infty} f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau \quad (2.6)$$

onde o símbolo “\*” indica a convolução de  $f_1$  e  $f_2$  por definição. A transformada de Laplace da convolução de  $f_1$  e  $f_2$  vale então

$$\mathcal{L}(f_1(t) * f_2(t)) = F_1(s) F_2(s) \quad (2.7)$$

d) Translação real

Uma translação no domínio do tempo consiste em adicionar ou subtrair uma constante ao tempo. Corresponde, portanto, a um atraso ou a uma antecipação de um evento. Então, se  $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ , a transformada de Laplace da translação real (isto é, no domínio do tempo) vale:

$$\mathcal{L}(f(t-a) \mathbf{1}(t-a)) = e^{-as} F(s) \quad (2.8)$$

onde  $a$  é uma constante real. Na translação real é necessário introduzir a função degrau unitário  $\mathbf{1}(t)$  para evitar que a função  $f$  assuma valores diferentes de zero quando  $t$  for menor do que  $a$ .

e) Translação complexa

Na translação complexa adiciona-se ou subtrai-se uma constante na função transformada. Novamente, se  $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ , então a translação complexa afirma que

$$F(s-a) = \mathcal{L}(e^{at} f(t)) \quad (2.9)$$

onde  $a$  é uma constante complexa.

f) Diferenciação real

A diferenciação real permite obter a transformada da derivada temporal de uma função. Esta propriedade é muito importante porque permite a construção da equação característica a partir da equação de derivadas, como será visto adiante. Supondo que  $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ , a diferenciação real resulta em

$$\mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}\right) = \mathcal{L}(\dot{f}) = s F(s) - f(0^-) \quad (2.10)$$

sendo que  $f(0^-)$  é o resultado da avaliação de  $f(t)$ , com  $t$  tendendo a 0 negativamente (pela esquerda). O conceito de diferenciação real pode ser estendido para derivadas de maior ordem, resultando

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^n f}{dt^n}\right) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2} \frac{df}{dt}(0^-) - \dots - s \frac{d^{n-2} f}{dt^{n-2}}(0^-) - \frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}}(0^-) \quad (2.11)$$

Nota-se que a função  $f$  e suas derivadas temporais, quando avaliadas no instante  $0^-$ , representam as condições iniciais do sistema. Por exemplo, considerando o movimento de um pêndulo, as condições iniciais irão estabelecer a posição inicial do pêndulo, (isto é, a posição  $\theta$  que ele ocupa no instante  $t = 0$ ) a sua velocidade  $\dot{\theta}$  inicial.

g) Integração real

A integração real permite obter a transformada de Laplace da integral da função  $f(t)$ . Se  $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ , a integração real leva ao resultado

$$\mathcal{L}\left(\int f(t) dt\right) = \frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s} \left[ \int f(t) dt \right]_{t=0^-} \quad (2.12)$$

h) Limite do valor final

O limite do valor final permite estabelecer uma correspondência entre o comportamento do sistema em regime permanente (isto é, conforme  $t$  tende ao infinito), e o valor da transformada de Laplace da função avaliada conforme  $s$  tende a zero, isto é:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s) \quad (2.13)$$

Uma vez que o valor de  $f(t)$  no regime permanente está relacionado com a estabilidade da dinâmica, a relação apresentada acima é utilizada na análise desta estabilidade. Contudo, esta expressão é válida somente se  $F(s)$  não apresentar pólos com parte real positiva (ver Seção 4.2).

### 2.3 Transformadas de Laplace de funções simples

Embora existam infinitas funções matemáticas, o comportamento dinâmico de sistemas lineares é governado por apenas uma pequena fração destas funções. Por outro lado, o termo forçante em geral possui também um comportamento dinâmico que pode ser expresso por meio de funções simples, o que limita também o universo de funções disponíveis para serem transformadas. Assim, a aplicação da transformada de Laplace em sistemas dinâmicos comuns levou a um número restrito de exemplos que podem ser relacionados sem a necessidade de se efetuar a transformação a cada novo problema. Em outras palavras, a quase totalidade de problemas encontrados pode ser resolvida por um pequeno conjunto de transformadas que já se encontram tabeladas. Assim, não é necessário efetuar a transformação, mas tão somente aplicar as tabelas de transformadas.

Na verdade, a manipulação de sistemas dinâmicos e o projeto de sistemas de controle são facilitados quando se trabalha no domínio da transformada de Laplace. Por outro lado, a visualização do comportamento dinâmico no tempo é obscurecida ao se utilizar a transformada, pelo menos por aqueles que ainda não se adaptaram com a variável complexa. Por isso, é freqüente que problemas sejam elaborados no domínio do tempo, resolvidos no domínio da transformada de Laplace e, a seguir, transformados de volta ao domínio do tempo. Logo, não apenas as transformações para o domínio da variável complexa são importantes, mas igualmente importantes são suas inversas, que permitem retornar ao domínio do tempo.

A Tabela 2.1 apresenta a transformada de Laplace das principais funções utilizadas em sistemas lineares.

Tabela 2.1 – Transformadas de Laplace de algumas funções.

	$f(t)$	$F(s)$
1-Função degrau unitário	$\mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{s}$
2-Função impulso	$\delta(t)$	1
3-Derivada do impulso	$\frac{d\delta(t)}{dt}$	$s$
4-Função rampa	$t$	$\frac{1}{s^2}$
5	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$
6	$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
7	$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
8	$\frac{1}{a^2}(at - 1 + e^{-at})$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
9	$\text{sen } \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
10	$\text{cos } \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
11	$e^{-at} \text{sen } \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
12	$e^{-at} \text{cos } \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
13	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t)$	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$
14	$\frac{\text{sen } \omega t - \omega t \text{cos } \omega t}{2\omega^3}$	$\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2}$
15	$t \text{cos } \omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$

## 2.4 Função de transferência

Considera-se um sistema dinâmico regido por uma equação diferencial linear a coeficientes constantes na variável  $y(t)$ , tal que  $x(t)$  é a função forçante

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x \quad (2.14)$$

Supondo agora que seja conhecida a transformada de Laplace de ambas as funções, isto é  $\mathcal{L}(y(t)) = Y(s)$  e  $\mathcal{L}(x(t)) = X(s)$ , então ao aplicar-se a transformada na equação diferencial, tem-se:

$$\mathcal{L}\left(a_n \frac{d^n y}{dt^n}\right) + \dots + \mathcal{L}\left(a_1 \frac{dy}{dt}\right) + \mathcal{L}(a_0 y) = \mathcal{L}\left(b_m \frac{d^m x}{dt^m}\right) + \dots + \mathcal{L}\left(b_1 \frac{dx}{dt}\right) + \mathcal{L}(b_0 x) \quad (2.15)$$

Aplicando a seguir a propriedade de diferenciação real, resulta que:

$$\begin{aligned} & a_n \left[ s^n Y(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} \frac{d^{i-1} y}{dt^{i-1}}(0^-) \right] + a_{n-1} \left[ s^{n-1} Y(s) - \sum_{i=1}^{n-1} s^{n-1-i} \frac{d^{i-1} y}{dt^{i-1}}(0^-) \right] + \dots + \\ & + a_1 \left[ s Y(s) - y(0^-) \right] + a_0 Y(s) = b_m \left[ s^m X(s) - \sum_{i=1}^m s^{m-i} \frac{d^{i-1} x}{dt^{i-1}}(0^-) \right] + \\ & + b_{m-1} \left[ s^{m-1} X(s) - \sum_{i=1}^{m-1} s^{m-1-i} \frac{d^{i-1} x}{dt^{i-1}}(0^-) \right] + \dots + b_1 \left[ s X(s) - x(0^-) \right] + b_0 X(s) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Agrupando os termos em  $Y(s)$  e  $X(s)$ , a equação fica

$$\begin{aligned} & (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) Y(s) - \\ & - a_n \sum_{i=1}^n s^{n-i} \frac{d^{i-1} y}{dt^{i-1}}(0^-) - a_{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} s^{n-1-i} \frac{d^{i-1} y}{dt^{i-1}}(0^-) - \dots - a_1 y(0^-) = \\ & = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0) X(s) - \\ & - b_m \sum_{i=1}^m s^{m-i} \frac{d^{i-1} x}{dt^{i-1}}(0^-) - b_{m-1} \sum_{i=1}^{m-1} s^{m-1-i} \frac{d^{i-1} x}{dt^{i-1}}(0^-) - b_1 x(0^-) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Isolando agora o termo  $Y(s)$ , tem-se que:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} X(s) + \\ & + \frac{a_n \sum_{i=1}^n s^{n-i} \frac{d^{i-1} y}{dt^{i-1}}(0^-) + a_{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} s^{n-1-i} \frac{d^{i-1} y}{dt^{i-1}}(0^-) + \dots + a_1 y(0^-)}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} - \\ & - \frac{b_m \sum_{i=1}^m s^{m-i} \frac{d^{i-1} x}{dt^{i-1}}(0^-) + b_{m-1} \sum_{i=1}^{m-1} s^{m-1-i} \frac{d^{i-1} x}{dt^{i-1}}(0^-) + \dots + b_1 x(0^-)}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Se o termo forçante for nulo, isto é, se  $x(t) = 0$ , então  $X(s)$  é também nulo, e tem-se com isso a **resposta do sistema à entrada nula ou estado nulo**, isto é:

$$Y_{X=0}(s) = \frac{a_n \sum_{i=1}^n s^{n-i} \frac{d^{i-1}y}{dt^{i-1}}(0^-) + a_{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} s^{n-1-i} \frac{d^{i-1}y}{dt^{i-1}}(0^-) + \dots + a_1 y(0^-)}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} - \frac{b_m \sum_{i=1}^m s^{m-i} \frac{d^{i-1}x}{dt^{i-1}}(0^-) + b_{m-1} \sum_{i=1}^{m-1} s^{m-1-i} \frac{d^{i-1}x}{dt^{i-1}}(0^-) + \dots + b_1 x(0^-)}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (2.19)$$

A resposta do sistema à entrada nula indica como o sistema evolui por si só após ser abandonado sem a aplicação de agentes externos. Por exemplo, um pêndulo ao ser deixado num ponto fora da posição de equilíbrio irá oscilar até amortecer por completo seu movimento pendular.

Por outro lado, se as condições iniciais forem todas nulas, ou seja, se  $y(t)$  e todas as suas derivadas temporais até a ordem  $n$  forem nulos, então se pode obter a **resposta do sistema às condições iniciais nulas**:

$$Y_{y(0)=0}(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} X(s) \quad (2.20)$$

Condições iniciais nulas significam que no início da contagem do tempo ( $t = 0$ ), o sistema encontra-se em equilíbrio e em repouso. Num sistema mecânico isto corresponde a posição e velocidades iniciais nulas. Num sistema elétrico, estas condições significam que os capacitores e indutores estão descarregados e a corrente inicial é nula.

A resposta de um sistema é dada, na transformada de Laplace, pela soma da resposta a condições iniciais nulas e da resposta à entrada nula:

$$Y(s) = Y_{X=0}(s) + Y_{y(0)=0}(s) \quad (2.21)$$

Com base na resposta do sistema às condições iniciais nulas define-se a **função de transferência**  $G(s)$  do sistema, dada por:

$$G(s) = \frac{Y_{y(0)=0}(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (2.22)$$

A função de transferência traduz o comportamento do sistema com relação a uma dada excitação aplicada pelo termo forçante. Em outras palavras, a função de transferência corresponde à transformada de Laplace da saída apresentada pelo sistema,  $Y(s)$ , com relação à transformada da entrada,  $X(s)$ , sob condições iniciais nulas. Ela só pode ser obtida para sistemas lineares. Em resumo, a função de transferência pode ser entendida como

$$\text{Função de transferência} = \frac{\text{Saída}}{\text{Entrada}}$$

**Exemplo 2.1** – Obter a função de transferência do sistema elétrico dado pela equação diferencial

$$RC \frac{d^2 i}{dt^2} + L \frac{di}{dt} + Ri = LC \frac{d^2 u}{dt^2} + u,$$

onde a função forçante é a tensão  $u(t)$  e a variável é a corrente  $i(t)$

Solução:

A transformada de Laplace da corrente  $i(t)$  é  $I(s)$ , enquanto que a transformada da tensão  $u(t)$  é  $U(s)$ . Aplicando a transformada de Laplace em ambos os membros, fica-se com

$$\mathcal{L}\left(RC \frac{d^2i}{dt^2} + L \frac{di}{dt} + Ri\right) = \mathcal{L}\left(LC \frac{d^2u}{dt^2} + u\right),$$

que, pela propriedade de linearidade fornece

$$RC \mathcal{L}\left(\frac{d^2i}{dt^2}\right) + L \mathcal{L}\left(\frac{di}{dt}\right) + R \mathcal{L}(i) = LC \mathcal{L}\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right) + \mathcal{L}(u),$$

e pela propriedade da diferenciação real, tem-se que

$$\begin{aligned} RC \left[ s^2 I(s) - s i(0^-) - \frac{di}{dt}(0^-) \right] + L \left[ s I(s) - i(0^-) \right] + R I(s) = \\ = LC \left[ s^2 U(s) - s u(0^-) - \frac{du}{dt}(0^-) \right] + U(s) \end{aligned}$$

Como a função de transferência assume condições iniciais nulas, então resulta

$$RC s^2 I(s) + L s I(s) + R I(s) = LC s^2 U(s) + U(s),$$

ou

$$\left[ RC s^2 + L s + R \right] I(s) = \left[ LC s^2 + 1 \right] U(s).$$

e a função de transferência fica

$$G(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = \frac{LC s^2 + 1}{RC s^2 + L s + R}$$

**Exemplo 2.2** – Obter a função  $f(t)$  cuja transformada de Laplace é dada por

$$F(s) = \frac{4}{s+2} - \frac{4}{s^2+16}.$$

Solução:

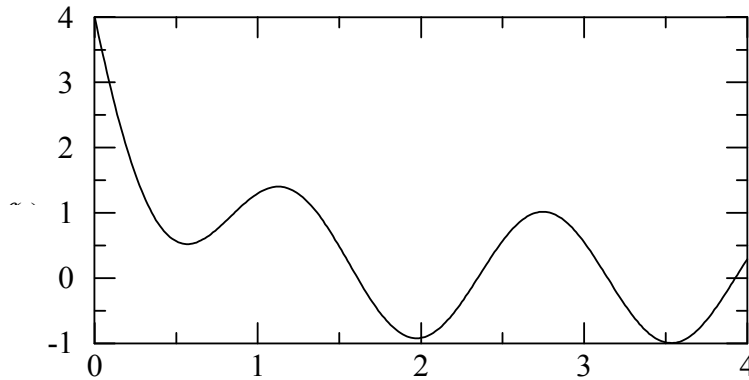
Pela propriedade de linearidade, a transformada inversa de uma soma é a soma das transformadas inversas, ou seja

$$f(t) = 4 \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{s^2+16}\right).$$

que corresponde, com base na tabela de transformadas, a

$$f(t) = 4e^{-2t} - \text{sen } 4t$$

A Figura 2.1 mostra a função  $f$  em função do tempo  $t$ .

Figura 2.1 – Função  $f(t)$  do exemplo 2.2

## 2.5 Polinômio característico

Seja novamente a equação diferencial de um sistema linear a coeficientes constantes, tal que o termo forçante  $x(t)$  seja nulo, dada pela equação homogênea:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = 0. \quad (2.23)$$

Aplicando a transformada de Laplace a esta equação (supondo que a transformada de  $y(t)$  seja  $Y(s)$ ), tem-se o **polinômio característico** da equação diferencial:

$$P(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \quad (2.24)$$

Nota-se que o polinômio característico é igual à equação característica, com a diferença que o polinômio é expresso na variável complexa  $s$ . De fato, a equação característica neste caso é dada por  $P(s) Y(s) = 0$ . Percebe-se também que o polinômio característico é o próprio denominador da função de transferência.

**Exemplo 2.3** – Obter a resposta à entrada nula do sistema cuja equação diferencial é

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2 y(t) = 3 \frac{du(t)}{dt} - u(t),$$

sujeita às condições iniciais  $y(0^-) = 1$  e  $\dot{y}(0^-) = 1$ . Indicar também o polinômio característico da equação.

**Solução:**

Aplicando a transformada de Laplace com condições iniciais não nulas na equação diferencial tem-se:

$$[s^2 Y(s) - s y(0^-) - \dot{y}(0^-)] + 3[s Y(s) - y(0^-)] + 2 Y(s) = 3[s U(s) - u(0^-)] - U(s),$$

que resulta, após agrupar os termos:

$$(s^2 + 3s + 2) Y(s) - s y(0^-) - \dot{y}(0^-) - 3 y(0^-) = (3s - 1) U(s) - 3 u(0^-)$$

Uma vez que a entrada é nula, então  $u(t) = 0$ , para  $t \geq 0$ , que implica em  $U(s) = 0$ . Logo a equação transformada fica



$$(s^2 + 3s + 2) Y_{x=0}(s) = s y(0^-) + \dot{y}(0^-) + 3 y(0^-)$$

O polinômio característico é portanto

$$P(s) = s^2 + 3s + 2$$

e a resposta à entrada nula será dada por:

$$Y_{x=0}(s) = \frac{(s+3)y(0^-) + \dot{y}(0^-)}{s^2 + 3s + 2}$$

Substituindo os valores das condições iniciais, e sabendo-se que as raízes do polinômio característico são 1 e 2, pode-se então separar a fração em dois termos (a decomposição de uma fração em frações parciais será estudada no capítulo 4):

$$Y_{x=0}(s) = \frac{s+4}{s^2 + 3s + 2} = \frac{3}{s+1} + \frac{-2}{s+2}$$

A transformada inversa de Laplace aplicada à equação acima resulta:

$$y(t) = 3e^{-t} - 2e^{-2t},$$

cujo gráfico é mostrado na Figura 2.2. Nota-se que o sistema tende para a origem conforme cresce o tempo.

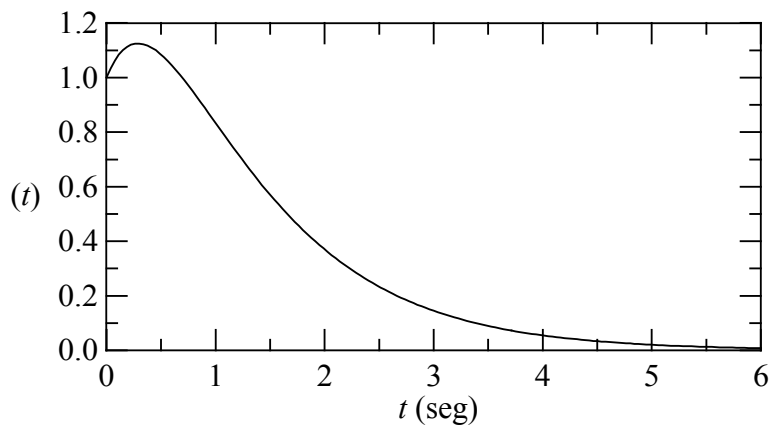


Figura 2.2 – Comportamento dinâmico do sistema do exemplo 2.3 à entrada nula.



### 3 SISTEMAS DINÂMICOS LINEARES

Os sistemas dinâmicos são compostos por diversos elementos que interagem entre si, trocando energia e transmitindo potência. Um motor de combustão interna, por exemplo, converte energia química presente no combustível em energia térmica na câmara de combustão. A energia térmica é convertida em pressão que por sua vez é convertida em força. A força move o pistão do motor linearmente, mas este movimento é a seguir transformado num movimento rotativo do eixo do motor. Parte da potência gerada no eixo é consumida por um alternador que converte a energia mecânica rotacional em energia elétrica, que será utilizada para disparar a centelha na vela. Esta centelha provoca a queima do combustível com o ar na câmara de combustão do motor. Tem-se, assim, num motor, um sistema composto por elementos térmicos, mecânicos, elétricos e pneumáticos. A análise de um sistema como este é bastante complexa, mas pode ser simplificada mediante a adoção de componentes com comportamento linear, e pela generalização de regras para a composição destes elementos em sistemas escalonados, isto é, sistemas complexos compostos por sistemas mais simples, e estes, compostos por elementos. Cada elemento, por sua vez, é descrito por **equações elementares**, que traduzem, de forma matemática, a lei que governa seu comportamento dinâmico.

#### 3.1 Elementos de sistemas dinâmicos

Os componentes com comportamento linear podem ser agrupados em: **mecânico translacional, mecânico rotacional, elétrico, hidráulico e térmico**. Sistemas pneumáticos não são lineares em virtude da compressibilidade do ar. Isto não significa, porém, que estes sistemas não possam ser utilizados em controle. Deve-se apenas cuidar para que sua utilização seja restrita a problemas onde a linearidade seja garantida.

Sistemas dinâmicos devem possuir uma ou mais entradas e apresentar uma ou mais saídas. Entradas e saídas são em geral termos forçantes ou variáveis de estado. As entradas são também conhecidas como **fontes** em virtude de sua característica de gerar sinais que excitam o sistema, ou prover energia para ele. Logo adiante serão vistas as principais fontes associadas aos sistemas lineares.

A saída de um sistema pode servir de entrada para outro, e, não raro, os sistemas podem transformar um tipo de variável em outro. Uma turbina hidráulica é um sistema que transforma energia hidráulica em movimento mecânico rotacional. Elementos que transformam a variável ou que amplificam um sinal sem transformá-lo em outro são genericamente conhecidos com **elementos a quatro terminais**.

#### 3.2 Mecânico translacional

Sistemas mecânicos translacionais são aqueles nos quais os deslocamentos seguem linhas retas. Existem 3 componentes lineares nos sistemas mecânicos translacionais: a **massa**, a **mola** e o **amortecedor**. Cada um deles possui uma equação que define seu comportamento dinâmico. Aplicando-se a lei de Newton numa massa  $m$ , por exemplo, tem-se que

$$f = m a = m \dot{v} = m \ddot{y} \quad (3.1)$$

que pode ser interpretada na forma: a força aplicada à massa é igual ao produto da massa pela aceleração. Nota-se que a aceleração pode ser expressa por meio da derivada temporal da velocidade  $v$  ou então pela segunda derivada do deslocamento  $y$ . A massa pode estar submetida a mais de uma força, e neste caso a equação pode ser generalizada na forma

$$\sum f_i = m a = m \dot{v} = m \ddot{y} \quad (3.2)$$

Aplicando-se a transformada de Laplace nesta relação, tem-se o resultado

$$\sum F_i(s) = m A(s) = m s V(s) = m s^2 Y(s), \quad (3.3)$$

onde  $A(s)$ ,  $V(s)$  e  $Y(s)$  representam a transformada de Laplace da aceleração, velocidade e deslocamento, respectivamente. A Figura 3.1 mostra a representação esquemática de uma massa sujeito à ação de forças.

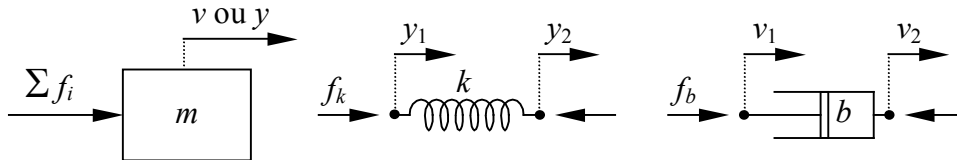


Figura 3.1 – Representação de uma massa  $m$  submetida a ação de forças, de uma mola de coeficiente  $k$  e de um amortecedor  $b$ .

A equação da mola é dada pela lei de Hook:

$$f = -k y, \quad (3.4)$$

onde  $k$  é a constante da mola. Nota-se que a força gerada pela mola é sempre contrária ao deslocamento, isto é, se o deslocamento for positivo a força é negativa e vice-versa. As extremidades da mola podem estar submetidas a deslocamentos distintos, como mostra a representação da mola na Figura 2.6, e portanto a equação fica:

$$f = -k (y_1 - y_2). \quad (3.5)$$

Nota-se que a mola é admitida como ideal, o que significa que sua massa é nula e que a força nas suas extremidades são iguais e contrárias. A força na mola pode ser posta também em função da velocidade das suas extremidades:

$$f_k = -k (y_1 - y_2) = -k \left( \int v_1 dt - \int v_2 dt \right). \quad (3.6)$$

Aplicando agora a transformada de Laplace a esta equação, tem-se

$$F_k(s) = -k [Y_1(s) - Y_2(s)] = -\frac{k}{s} [V_1(s) - V_2(s)]. \quad (3.7)$$

Um amortecedor é um componente capaz de resistir ao movimento de seus terminais. Um amortecedor automotivo é um bom exemplo deste componente, e sua função é dissipar a energia de oscilação do veículo causada pela mola. A força no amortecedor é proporcional à velocidade com que as suas extremidades se aproximam ou se afastam, como mostra o esquema da Figura 3.1, ou seja

$$f_b = -b (v_1 - v_2) = -b (\dot{y}_1 - \dot{y}_2) \quad (3.8)$$

A transformada de Laplace da equação acima resulta em

$$F_b(s) = -b [V_1(s) - V_2(s)] = -b s [Y_1(s) - Y_2(s)] \quad (3.9)$$

É claro que amortecedores mecânicos são também idealizados, isto é, admite-se que possuem massa nula.

### 3.3 Mecânico rotacional

Sistemas mecânicos rotacionais são bastante semelhantes a sistemas translacionais. A lei de Newton pode ser aplicada também a elementos que giram, como rotores, freios e molas torcionais. O equivalente da massa translacional em sistemas mecânicos rotacionais é a inércia ou momento de inércia. É igual ao produto da massa pelo quadrado do raio de giro. Portanto, o momento de inércia depende da massa do corpo e também da direção do eixo de rotação. Um cilindro, por exemplo, possui diferentes momentos de inércia para eixos paralelos ou perpendiculares ao seu eixo de simetria. O momento de inércia de um corpo qualquer é definido como

$$I = \int_V r^2 \rho dV \quad (3.10)$$

onde  $r$  é o raio de giro do elemento de volume  $dV$  e  $\rho$  é a densidade do material na posição  $r$ . A integral deve ser efetuada em todo o volume  $V$  da massa. O raio de giro  $r$  é a distância do elemento de volume  $dV$  ao eixo de rotação. O momento de inércia de um cilindro de raio  $r$  e massa  $m$  com relação ao seu eixo de simetria vale

$$I_{cil} = m \frac{r^2}{2}. \quad (3.11)$$

Uma esfera de raio  $r$  e massa  $m$  possui momento de inércia com relação a um eixo que passa pelo seu centro igual a

$$I_{esf} = 2m \frac{r^2}{5}. \quad (3.12)$$

A lei de Newton aplicada a uma inércia rotacional é

$$\sum \tau_i = I \alpha = I \dot{\omega} = I \ddot{\theta}, \quad (3.13)$$

onde  $\tau_i$  é um dos torques aplicados na inércia  $I$ , e causa a aceleração angular  $\alpha$ .  $\omega$  e  $\theta$  representam, respectivamente, a velocidade angular e o ângulo de rotação da inércia. A representação esquemática da inércia é mostrada na Figura 3.2.

A transformada de Laplace do torque aplicado à inércia  $I$  gera

$$\sum T_i(s) = I A(s) = I s \Omega(s) = I s^2 \Theta(s), \quad (3.14)$$

sendo que  $T(s)$ ,  $A(s)$ ,  $\Omega(s)$  e  $\Theta(s)$  são as transformadas do torque  $\tau$ , da aceleração angular  $\alpha$ , da velocidade angular  $\omega$  e do deslocamento angular  $\theta$ , respectivamente.

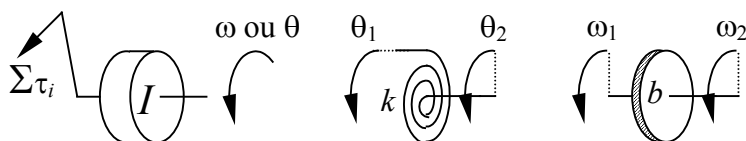


Figura 3.2 – Representação do momento de inércia  $I$ , da mola torcional e do amortecedor rotacional.

A mola torcional (semelhante à mola de um relógio) e o amortecedor rotacional (dois discos face a face em fricção, como a embreagem de um veículo), mostrados também na Figura 2.9, seguem expressões análogas aos equivalentes translacionais:

$$\tau_k = -k(\theta_1 - \theta_2) = -k \left( \int \omega_1 dt - \int \omega_2 dt \right), \quad (3.15)$$

e

$$\tau_b = -b(\omega_1 - \omega_2) = -b(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2). \quad (3.16)$$

Aplicando a transformada de Laplace nestas expressões, tem-se:

$$T_k(s) = -k[\Theta_1(s) - \Theta_2(s)] = -\frac{k}{s}[\Omega_1(s) - \Omega_2(s)], \quad (3.17)$$

e

$$T_b = -b[\Omega_1(s) - \Omega_2(s)] = -b s [\Theta_1(s) - \Theta_2(s)]. \quad (3.18)$$

### 3.4 Elétrico

Os componentes de circuitos elétricos são: o capacitor, o indutor e a resistência. Estes componentes são elementos passivos, isto é, não necessitam de suprimento de energia para funcionarem adequadamente. Existem, é claro, diversos outros elementos associados a circuitos elétricos, como transistores, amplificadores operacionais, chaves de potência, etc. Todos eles, porém, necessitam de suprimento externo de energia e são não lineares. São, portanto, tratados diferentemente dos circuitos passivos. Da mesma forma que a força estabelece as relações dinâmicas nos sistemas mecânicos, nos sistemas elétricos é a corrente que faz este papel. Porém é mais prático representar esta dinâmica não em termos da corrente, mas sim da tensão elétrica (voltagem). Há, de fato, uma grande analogia entre os sistemas elétricos e mecânicos (e também entre estes e os sistemas hidráulicos). A mudança da representação de corrente para tensão não altera esta analogia.

Nos elementos dos circuitos elétricos, a tensão varia nos terminais do elemento, conforme mostra a Figura 3.3, seja ele um indutor, um capacitor ou uma resistência (ou resistor). A corrente que o atravessa, contudo é a mesma em qualquer um dos seus terminais.

Um indutor de indutância  $L$  submetido a tensões  $u_1$  e  $u_2$  ( $u_1 > u_2$ ) em seus terminais, apresenta uma variação na corrente proporcional a esta tensão, ou seja

$$u_1(t) - u_2(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (3.19)$$

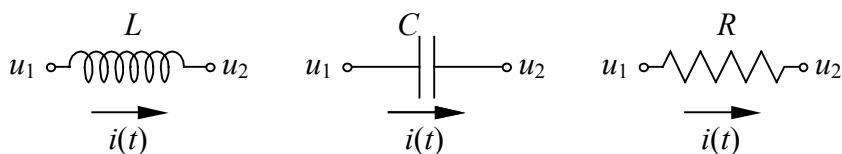


Figura 3.3 – Representação dos elementos elétricos: indutor  $L$ , capacitor  $C$  e resistor  $R$ .

Por sua vez, a corrente elétrica num capacitor é proporcional à variação da tensão em seus terminais, ou

$$u_1(t) - u_2(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad (3.20)$$

No resistor, por sua vez, a corrente é proporcional à tensão:

$$u_1(t) - u_2(t) = R i(t) \quad (3.21)$$

Pode-se agora efetuar a transformada de Laplace destas relações, supondo, é claro, que a transformada da corrente é  $I(s)$ , e a transformada da tensão é  $U(s)$ . Tem-se com isso as impedâncias complexas do indutor, capacitor e resistor, respectivamente:

$$U_1(s) - U_2(s) = L s I(s), \quad (3.22)$$

$$U_1(s) - U_2(s) = \frac{1}{C s} I(s), \quad (3.23)$$

e

$$U_1(s) - U_2(s) = R I(s). \quad (3.24)$$

A corrente elétrica é definida como sendo igual ao fluxo de carga que passa num condutor por unidade de tempo. Em outras palavras,

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}, \quad (3.25)$$

onde  $q(t)$  é a carga das partículas elétricas. Efetuando a transformada de Laplace da corrente em função da carga tem-se  $I(s) = s Q(s)$ , o que permite relacionar as transformadas elementares também em termos da carga que passa pelos elementos:

$$U_1(s) - U_2(s) = L s^2 Q(s), \quad (3.26)$$

$$U_1(s) - U_2(s) = \frac{1}{C} Q(s), \quad (3.27)$$

$$U_1(s) - U_2(s) = R s Q(s). \quad (3.28)$$

Capacitores, resistores e indutores reais possuem comportamento dinâmico diferente deste apresentado aqui. Eles são lineares até certo ponto, a partir do qual as não linearidades passam a dominar. Além disso, não existem elementos totalmente puros. Um capacitor apresenta uma certa resistência e uma certa indutância. O mesmo é válido para os outros elementos. Em geral, a capacitância e a indutância exibida por um resistor real é suficientemente baixa para que possa ser desprezada nos cálculos. Isto também acontece nos capacitores e nos indutores reais.

### 3.5 Hidráulico

Analogamente aos demais elementos dos sistemas lineares, sistemas hidráulicos possuem 3 elementos básicos: a indutância fluida ou inertância  $L_f$ , a capacitância fluida  $C_f$  e a resistência fluida  $R_f$ . Uma indutância fluida ocorre quando se tem uma grande quantidade de

líquido fluindo por uma tubulação longa e de grande diâmetro, como mostra a Figura 3.4. Como ocorre com uma inércia qualquer, ao se tentar frear ou acelerar esta grande massa de líquido é necessário prover uma grande pressão (força) e energia. Portanto, a diferença de pressão nas extremidades da tubulação será a responsável pela variação na vazão de líquido  $q(t)$  (em unidades de volume por unidade de tempo), na forma:

$$p_1(t) - p_2(t) = L_f \frac{dq(t)}{dt} \quad (3.29)$$

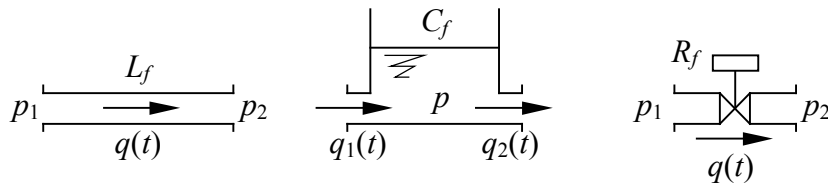


Figura 3.4 – Representação esquemática da inertância fluida  $L_f$ , capacitância fluida  $C_f$ , e resistência fluida  $R_f$ .

Uma capacitância fluida é na verdade um tanque de líquido, no qual a capacitância depende da área da seção transversal. Neste tanque a pressão no fundo depende exclusivamente da altura do líquido, e é a mesma tanto na saída como na entrada, conforme indica a Figura 3.4. Porém as vazões de líquido podem ser diferentes, fazendo com que o nível do líquido aumente, se a vazão de entrada for maior do que a vazão de saída, isto é, se  $q_1(t) > q_2(t)$ , ou diminua caso contrário. A relação que governa a dinâmica do capacitor fluido é então

$$q_1(t) - q_2(t) = C_f \frac{dp(t)}{dt} \quad (3.30)$$

Esta relação resulta da constatação de que a pressão num ponto depende da altura da coluna de líquido sobre este ponto. Em outras palavras, a força  $f$  exercida sobre uma área  $A$  é função do peso do líquido acima desta área, ou

$$p = \frac{f}{A} = \frac{\rho V g}{A}, \quad (3.31)$$

pois a massa do líquido é igual ao produto da densidade  $\rho$  pelo volume ( $g$  é a aceleração da gravidade). Por sua vez, o volume de líquido sobre a área é dado pelo produto da área  $A$  pela altura  $h$  deste líquido até a superfície, de onde:

$$p = \rho g h. \quad (3.32)$$

Porém, se  $q_1(t) - q_2(t)$  representar a vazão que entra no tanque, então o volume  $dV$  de líquido acrescentado no intervalo de tempo  $dt$  será igual a  $[q_1(t) - q_2(t)] dt$ . Neste intervalo de tempo, este volume causou uma variação  $dh$  da altura da coluna de água do tanque, de tal forma que  $dV = A dh$ . Igualando os volumes tem-se

$$A \frac{dh}{dt} = q_1(t) - q_2(t). \quad (3.33)$$



Derivando agora a relação que fornece a pressão em função da altura  $h$  e substituindo na expressão acima, chega-se a

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\rho g}{A} [q_1(t) - q_2(t)]. \quad (3.34)$$

Comparando-se agora esta relação com a equação do capacitor fluido, obtém-se que

$$C_f = \frac{A}{\rho g}, \quad (3.35)$$

Por sua vez, uma resistência fluida é simplesmente um registro, ou uma torneira semi-aberta. Neste elemento é possível ajustar o valor da resistência fluida  $R_f$  abrindo ou fechando o registro. Nos circuitos hidráulicos assume-se que este valor da resistência é fixo, caso contrário o sistema já não seria linear a coeficientes constantes. Na resistência fluida a vazão que passa por ela é proporcional à diferença de pressão em seus terminais:

$$p_1(t) - p_2(t) = R_f q(t) \quad (3.36)$$

Esta relação permite analisar um fenômeno pouco compreendido no cotidiano. Percebe-se por ela que uma torneira consegue ajustar a vazão, mas não a pressão. Em outras palavras, ajustando-se o registro convenientemente pode-se dosar a quantidade de líquido que jorra da torneira. Porém, não se consegue ajustar a pressão por meio dela. Isto significa que se uma torneira apresentar um pequeno vazamento (pingando), dependendo da pressão na tubulação não se consegue deter este vazamento com a mão, por menor que seja ele.

Aplicando agora a transformada de Laplace nas equações acima tem-se para a inércia, capacitância fluida e resistência fluida, respectivamente

$$P_1(s) - P_2(s) = L_f s Q(s), \quad (3.37)$$

$$Q_1(s) - Q_2(s) = C_f s P(s), \quad (3.38)$$

$$P_1(s) - P_2(s) = R_f Q(s). \quad (3.39)$$

onde  $P(s)$  é a transformada de Laplace da pressão hidráulica  $p(t)$ , e  $Q(s)$  é a transformada da vazão  $q(t)$ . Pode-se também obter a transformada de Laplace do capacitor fluido em função da altura de líquido  $h(t)$ :

$$Q_1(s) - Q_2(s) = A s H(s) = \bar{C}_f s H(s), \quad (3.40)$$

onde  $\bar{C}_f = \rho g C_f$ .

A Tabela 3.1 apresenta um resumo dos elementos vistos até agora e a relação que estabelece seu comportamento dinâmico.

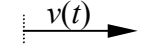
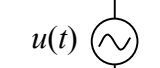
Tabela 3.1 – Elementos de sistemas dinâmicos lineares.

Sistema	Elemento	S	$f(t)$	$F(s)$
Mecânico translacional  y: desloc. v: veloc.	Massa	$m$	$\sum f_i(t) = m \ddot{y}(t)$ $\sum f_i(t) = m \dot{v}(t)$	$\sum F_i(s) = m s^2 Y(s)$ $\sum F_i(s) = m s V(s)$
	Mola	$k$	$f_k(t) = -k[y_1(t) - y_2(t)]$ $f_k = -k \left( \int v_1(t) dt - \int v_2(t) dt \right)$	$F_k(s) = -k[Y_1(s) - Y_2(s)]$ $F_k(s) = -\frac{k}{s} [V_1(s) - V_2(s)]$
	Amortecedor	$b$	$f_b(t) = -b[\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)]$ $f_b(t) = -b[v_1(t) - v_2(t)]$	$F_b(s) = -b s [Y_1(s) - Y_2(s)]$ $F_b(s) = -b [V_1(s) - V_2(s)]$
Mecânico rotacional	Inércia	$I$	$\sum \tau_i(t) = I \ddot{\theta}(t)$ $\sum \tau_i(t) = I \dot{\omega}(t)$	$\sum T_i(s) = I s^2 \Theta(s)$ $\sum T_i(s) = I s \Omega(s)$
	Mola torcional	$k$	$\tau_k(t) = -k[\theta_1(t) - \theta_2(t)]$ $\tau_k(t) = -k \left( \int \omega_1(t) dt - \int \omega_2(t) dt \right)$	$T_k(s) = -k[\Theta_1(s) - \Theta_2(s)]$ $T_k(s) = -\frac{k}{s} [\Omega_1(s) - \Omega_2(s)]$
	Amortecedor rotacional	$b$	$\tau_b(t) = -b[\dot{\theta}_1(t) - \dot{\theta}_2(t)]$ $\tau_b(t) = -b[\omega_1(t) - \omega_2(t)]$	$T_b = -b s [\Theta_1(s) - \Theta_2(s)]$ $T_b = -b [\Omega_1(s) - \Omega_2(s)]$
Elétrico	Indutor	$L$	$u_1(t) - u_2(t) = L \frac{di(t)}{dt} = L \frac{d^2q(t)}{dt^2}$	$U_1(s) - U_2(s) = L s^2 Q(s)$ $U_1(s) - U_2(s) = L s I(s)$
	Capacitor	$C$	$u_1(t) - u_2(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt = \frac{1}{C} q(t)$	$U_1(s) - U_2(s) = \frac{1}{C} Q(s)$ $U_1(s) - U_2(s) = \frac{1}{C s} I(s)$
	Resistor	$R$	$u_1(t) - u_2(t) = R i(t) = R \frac{dq(t)}{dt}$	$U_1(s) - U_2(s) = R s Q(s)$ $U_1(s) - U_2(s) = R I(s)$
Hidráulico	Inertância	$L_f$	$p_1(t) - p_2(t) = L_f \frac{dq(t)}{dt}$	$P_1(s) - P_2(s) = L_f s Q(s)$
	Capacitância fluida	$C_f$ $A$	$q_1(t) - q_2(t) = C_f \frac{dp(t)}{dt}$ $q_1(t) - q_2(t) = A \frac{dh(t)}{dt}$	$Q_1(s) - Q_2(s) = C_f s P(s)$ $Q_1(s) - Q_2(s) = A s H(s)$
	Resistência fluida	$R_f$	$p_1(t) - p_2(t) = R_f q(t)$	$P_1(s) - P_2(s) = R_f Q(s)$

### 3.6 Elementos de entrada – fontes

Como já foi dito, sistemas necessitam ser abastecidos de sinais que transmitam energia ou informação. Estas entradas são conhecidas como fontes, e existem basicamente dois tipos delas: **fontes de fluxo** e **fontes de potencial**. São também conhecidas, respectivamente, por fontes de “variável-através” e fontes de “variável-entre”. As fontes e sua simbologia são apresentadas na Tabela 3.2.

Tabela 3.2 – Fontes de sistemas dinâmicos lineares

Sistema	Tipo	Fonte	Símbolo	Representação
Mecânico translacional	fluxo	força	$f(t)$	
	potencial	velocidade	$v(t)$	
Mecânico rotacional	fluxo	torque	$\tau(t)$	
	potencial	velocidade angular	$\omega(t)$	
Elétrico	fluxo	corrente elétrica	$i(t)$	
	potencial	tensão	$u(t)$ $e(t)$	
Hidráulico	fluxo	vazão	$q(t)$	
	potencial	pressão	$p(t)$	

### 3.7 Modelagem de sistemas dinâmicos pela transformada de Laplace

A modelagem matemática de sistemas físicos nem sempre é uma tarefa fácil. O grau de realismo do modelo matemático depende da completa representação dos elementos físicos reais e do ajuste de seus parâmetros. Infelizmente os elementos físicos não são ideais e muitas vezes os requisitos de linearização são desobedecidos. Um pêndulo real, por exemplo, é sempre amortecido, mesmo que não haja explicitamente um amortecedor no eixo. Um oscilador elétrico formado por um capacitor e um indutor também amortece as oscilações, uma vez que ambos os elementos possuem resistência, mesmo que pequena.

Existem diversas ferramentas e procedimentos utilizados em modelagem de sistemas físicos lineares. Entre estas, citam-se o diagrama de grafos e o diagrama de blocos, este último visto adiante.

A modelagem de sistemas é realizada identificando-se os elementos físicos presentes e suas equações elementares (supostamente lineares). Aplicam-se, a seguir, relações de continuidade ou de equilíbrio, como por exemplo o equilíbrio de forças numa massa e a soma de correntes elétricas num circuito fechado. De posse destas equações pode-se obter quer a equação diferencial do sistema, quer a função de transferência. Uma vez que tanto a manipulação do sistema quanto seu controle é realizado de maneira mais proveitosa no domínio da variável complexa, então é desejável obter diretamente a função de transferência, como mostrado nos exemplos a seguir.

Exemplo 3.1 – Obter a função de transferência do sistema mecânico mostrado na Figura 3.5, considerando que o termo forçante  $f(t)$  é a entrada e a posição da massa,  $x(t)$  é a saída.

Solução:

As forças que atuam na massa  $m$  são o termo forçante  $f(t)$ , a força da mola e a força do amortecedor. Aplicando a lei de Newton nesta massa tem-se:

$$f(t) - kx(t) - b\dot{x}(t) = m\ddot{x}(t)$$

Nota-se que, para deslocamentos positivos, isto é, deslocamentos da massa no sentido positivo de  $x$ , as forças tanto da mola quanto do amortecedor são negativas (direção contrária à de  $x$ ). Em virtude disso, deve-se acrescentar o sinal negativo nestas forças quando se calcula a resultante. Aplicando a transformada de Laplace na equação acima tem-se

$$F(s) = ms^2 X(s) + bsX(s) + kX(s).$$

A função de transferência é então dada por:

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

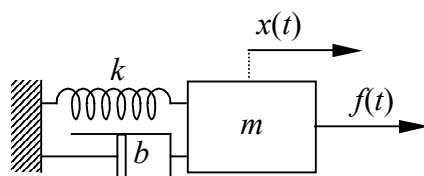


Figura 3.5 – Sistema mecânico do exemplo 3.1

**Exemplo 3.2** – Obter a função de transferência do sistema elétrico mostrado na Figura 3.6, considerando que a entrada é a tensão de alimentação  $u(t)$  e a saída é a carga  $y(t)$  nos terminais do capacitor.

Solução:

Como todos os elementos estão em série, a corrente  $i(t)$  que passa pelo circuito é única. A tensão  $u(t)$  é então dividida entre os diversos elementos, ou seja, a soma das tensões nos terminais dos 3 elementos é igual à tensão de alimentação. Aplicando as relações elementares tem-se então

$$u(t) = R \frac{dy(t)}{dt} + L \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{1}{C} y(t),$$

cuja transformada de Laplace é

$$U(s) = R sY(s) + L s^2 Y(s) + \frac{1}{C} Y(s).$$

Pode-se agora obter a função de transferência do sistema por meio de:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{C}{CLs^2 + CRs + 1}$$

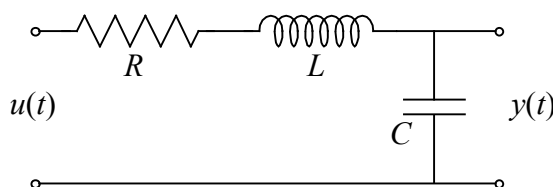


Fig 3.6 – Sistema elétrico do exemplo 3.2

**Exemplo 3.3** – Obter a função de transferência do sistema elétrico mostrado na Figura 3.7, considerando que a entrada é a tensão de alimentação  $u(t)$  e a saída é a corrente  $i(t)$  do circuito.

Solução:

Se  $v(t)$  for a tensão nos terminais do capacitor e do indutor, e  $i_C(t)$  e  $i_L(t)$  forem as correntes no capacitor e indutor, respectivamente, então pode-se escrever as equações transformadas dos três elementos formadores do circuito:

$$U(s) - V(s) = R I(s),$$

$$V(s) = \frac{1}{C s} I_C(s),$$

$$V(s) = L s I_L(s).$$

A continuidade da corrente fornece uma equação suplementar:

$$I(s) = I_C(s) + I_L(s)$$

Eliminando-se agora as variáveis  $V(s)$ ,  $I_C(s)$  e  $I_L(s)$  do sistema de 4 equações, resulta que

$$G(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = \frac{CLs^2 + 1}{RCLs^2 + Ls + R}$$

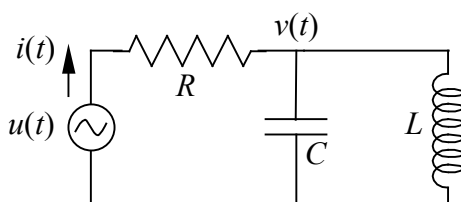


Figura 3.7 – Sistema elétrico do exemplo 3.3

Nota-se que a tensão no terminal negativo das fontes de tensão, denominada de **terra**, deve ser considerada nula nos cálculos. Esta é a causa das equações do capacitor e do indutor, no exemplo 3.3, estarem submetidos à tensão  $v(t) - 0 = v(t)$ .

Quando a função de transferência de um circuito elétrico representar a relação entre a corrente total no circuito e a tensão aplicada a ele, como mostrado no exemplo 3.3, então ela pode ser obtida por meio da **impedância equivalente**. Neste caso, os elementos são substituídos por suas impedâncias equivalentes, ou seja, pela transformada de Laplace das equações elementares. Em seguida, calcula-se a impedância total do circuito pela adição das impedâncias em série e pela média geométrica das impedâncias em paralelo, de maneira

semelhante àquela realizada com um circuito composto exclusivamente por elementos resistivos. A função de transferência será dada, neste caso, pelo inverso da impedância total. O exemplo 3.4 ilustra este conceito.

**Exemplo 3.4** – Obter a função de transferência do sistema elétrico da Figura 3.7 por meio da impedância equivalente.

Solução:

Substituindo os elementos pelas suas impedâncias equivalentes, tem-se o circuito mostrado na Figura 3.8 (a). A seguir, combinando-se em paralelo as impedâncias do capacitor e do indutor, obtém-se o diagrama da Figura 3.8 (b). Finalmente, junta-se a impedância do resistor em série para obter o diagrama mostrado na Figura 3.8 (c). A função de transferência será portanto igual ao inverso da impedância do circuito, ou seja:

$$G(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = \frac{CLs^2 + 1}{RCLs^2 + Ls + R}$$

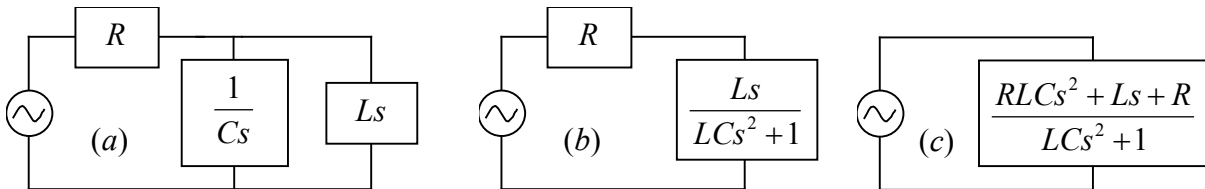


Figura 3.8 – Sequência de cálculo da impedância equivalente do exemplo 3.4.

O cálculo da impedância pode ajudar a simplificar a resolução do problema, mas nem sempre ela leva diretamente à resposta. Isto acontece porque é necessário que o circuito simplificado apresente ainda os terminais relativos à entrada e à saída, ou seja, a simplificação não deve eliminar estes terminais. Isto em geral poderia acontecer se os sinais de entrada e saída estiverem em locais distintos do circuito. As impedâncias do circuito devem então ser agrupadas entre si, porém mantendo sempre os sinais de entrada e saída presentes nele. No exemplo a seguir, a impedância foi utilizada para reduzir o circuito ao menor possível. A partir deste ponto, utiliza-se a forma convencional da eliminação de variáveis.

**Exemplo 3.5** – Obter a função de transferência mostrada na Figura 3.9(a), onde a entrada é a tensão  $e_i(t)$  e a saída é a tensão  $e_o(t)$ . Simplificar o circuito por meio de impedância equivalente.

Solução:

Percebe-se que neste circuito há um conjunto de resistores e capacitores arranjados em paralelo e em série. Pode-se agrupar as impedâncias equivalentes de cada um destes conjuntos, porém não se deve calcular a impedância completa do circuito, pois, neste caso, a saída  $e_o$  irá desaparecer. A Figura 3.9(b) ilustra como se pode obter a impedância equivalente deste circuito sem perder o sinal de saída. Para obter a função de transferência agora basta aplicar a lei de Ohm no circuito, supondo que a corrente que o circula é  $i(t)$ :

$$E_i(s) - E_o(s) = \frac{R_1}{R_1 C_1 s + 1} I(s)$$

$$E_o(s) = \frac{R_2 C_2 s + 1}{C_2 s} I(s)$$

A eliminação da corrente  $I(s)$  fornece a função de transferência:

$$G(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2) s + 1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) s + 1}$$

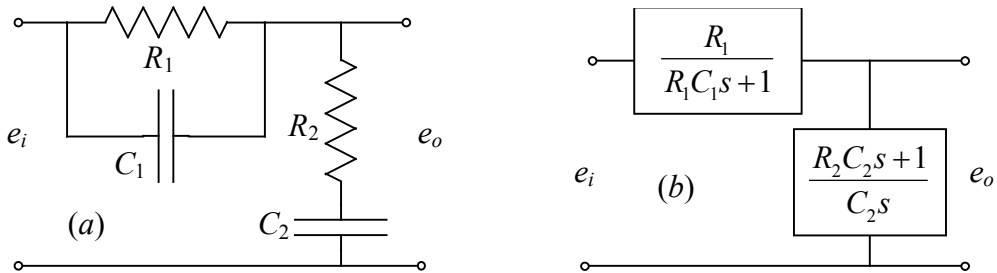


Figura 3.9 – Sistema elétrico do exemplo 3.5 (a) e impedância equivalente (b).

Infelizmente, nem sempre a simplificação do circuito por impedância equivalente é eficiente na solução. O exemplo a seguir ilustra um caso no qual não há vantagem alguma no uso da impedância equivalente, uma vez que não se consegue agrupar os componentes em nenhum local do circuito.

**Exemplo 3.6** – A Figura 3.10 mostra um filtro elétrico. Deseja-se conhecer a função de transferência entre a corrente de entrada,  $i_i(t)$  e a corrente de saída,  $i_o(t)$ .

Solução:

Uma vez que as equações dos elementos necessitam das tensões nos terminais, então se admite que  $u_1$  seja a tensão no terminal comum de  $R_1$  e  $C_1$ , e  $u_2$  seja a tensão no terminal comum de  $R_2$  e  $C_2$ . Admite-se, igualmente, que a corrente através de  $C_1$  seja  $i_1$ , e através de  $C_2$  seja  $i_2$ . Disto resulta que a corrente sobre  $R_1$  será  $i_i - i_1$ . As equações elementares dos capacitores  $C_1$  e  $C_2$ , e dos resistores  $R_1$  e  $R_2$  ficam então, respectivamente

$$I_1 = C_1 s U_1$$

$$I_2 = C_2 s U_2$$

$$U_1 - U_2 = R_1 (I_i - I_1)$$

$$U_2 = R_2 I_o$$

A continuidade das correntes nos condutores estabelece mais uma equação: a corrente em  $R_1$  é igual à soma das correntes no capacitor  $C_2$  e no resistor  $R_2$ , ou seja

$$I_i - I_1 = I_2 + I_o,$$

o que permite eliminar  $I_2 = I_i - I_1 - I_o$  das equações. A corrente  $I_1$  pode ser eliminada em seguida, substituindo-se a primeira equação nas demais, o que resulta

$$C_2 s U_2 = I_i - C_1 s U_1 - I_o$$

$$(1 + C_1 R_1 s) U_1 - U_2 = R_1 I_i$$

$$U_2 = R_2 I_o$$

Elimina-se agora a tensão  $U_2$  pela substituição da terceira equação nas outras

$$(1 + C_2 R_2 s) I_o = I_i - C_1 s U_1$$

$$(1 + C_1 R_1 s) U_1 - R_2 I_o = R_1 I_i$$

Por último, elimina-se a tensão  $U_1$  para obter a função de transferência

$$G(s) = \frac{I_o}{I_i} = \frac{1}{C_1 R_1 C_2 R_2 s^2 + (C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_1 R_2) s + 1}$$

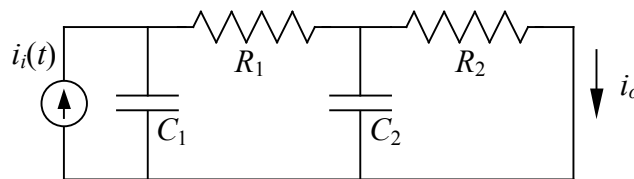


Figura 3.10 – Sistema elétrico do exemplo 3.6

**Exemplo 3.7** – Seja o sistema hidráulico mostrado na Figura 3.11. Deseja-se obter a função de transferência entre a vazão de saída,  $q_o(t)$  e a vazão de entrada,  $q_i(t)$ .

Solução:

Inicialmente admite-se que a pressão no fundo do capacitor fluido  $C_1$  seja  $p_1$  e, analogamente, a pressão no capacitor  $C_2$  seja  $p_2$ . É necessário ainda admitir que a vazão que passa pela resistência  $R_1$  seja  $q_r$ , como já indicado na Figura 3.11. Pode-se agora escrever as equações dos elementos, pois todos os parâmetros já foram definidos. As equações do capacitor  $C_1$ , resistência  $R_1$ , capacitor  $C_2$  e resistência  $R_2$  são, respectivamente

$$Q_i - Q_r = C_1 s P_1,$$

$$P_1 - P_2 = R_1 Q_r,$$

$$Q_r - Q_o = C_2 s P_2,$$

$$P_2 = R_2 Q_o.$$

Substituindo  $P_2$  da quarta equação nas demais, tem-se

$$Q_i - Q_r = C_1 s P_1,$$

$$P_1 = R_1 Q_r + R_2 Q_o,$$

$$Q_r = (1 + C_2 R_2 s) Q_o,$$

Substituindo agora  $P_1$  da segunda equação na primeira,

$$Q_i = (1 + C_1 R_1 s) Q_r + C_1 R_2 s Q_o,$$



$$Q_r = (1 + C_2 R_2 s) Q_o,$$

Finalmente, eliminando  $Q_r$  obtém-se a função de transferência

$$G(s) = \frac{Q_o}{Q_i} = \frac{1}{C_1 R_1 C_2 R_2 s^2 + C_1 R_1 s + C_2 R_2 s + C_1 R_2 s + 1}$$

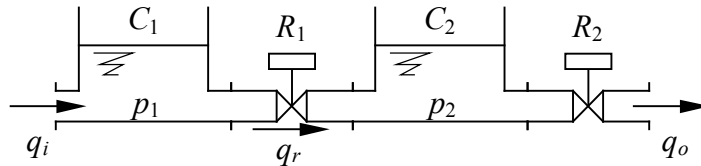


Figura 3.11 – Sistema hidráulico do exemplo 3.7

Deve-se notar que sempre que a saída de uma capacitância, inércia ou resistência fluida estiver aberta (não conectada com outro elemento), então a pressão neste ponto deve ser considerada nula. No exemplo 3.7, a saída da resistência  $R_2$  está aberta e portanto a pressão neste ponto é nula.

Outro ponto importante a ser notado é que as funções de transferência dos exemplos 3.6 e 3.7 são idênticas. Sistemas distintos que apresentam a mesma função de transferência são denominados de **análogos**. Estes sistemas exibem o mesmo comportamento dinâmico quando sujeitos à mesma entrada. Isto permite compreender, portanto, que o sistema hidráulico do exemplo 3.7 é também um filtro, cuja função é reduzir as oscilações na saída causadas por mudanças na entrada.

### 3.8 Elementos transformadores e transdutores

**Elementos transformadores** são elementos (mecânicos, elétricos, hidráulicos, etc) que amplificam ou reduzem a magnitude de determinada variável. **Elementos transdutores**, por sua vez, além de amplificar ou reduzir a magnitude, também modificam o tipo de variável. Assim um sistema mecânico pode ser transformado num sistema elétrico, este num sistema hidráulico e assim por diante. Tanto os elementos transformadores quanto os transdutores possuem uma única entrada e uma única saída. Por definição, elementos transformadores são ideais, ou seja, não dissipam calor nem consomem energia. Em outras palavras, tais elementos não necessitam de fonte adicional de potência para operarem. Estes elementos são também conhecidos como elementos a quatro terminais (em virtude da similaridade com transformadores elétricos).

#### 3.8.1 Elementos transformadores

O equivalente ao transformador de um sistema mecânico translacional é a alavanca (Figura 3.12). Supondo que a massa e, conseqüentemente o momento de inércia da alavanca são negligenciáveis, então numa alavanca em equilíbrio estático os conjugados (torques) são nulos, o que significa que:

$$f_o = \frac{a}{b} f_i \tag{3.41}$$

onde  $f_o$  é a reação da força exercida pela alavanca e  $f_i$  é a força aplicada na alavanca. Além disso, supondo pequenos deslocamentos dos pontos onde as forças são aplicadas então as seguintes relações são também válidas:

$$x_o = \frac{b}{a} x_i \quad (3.42)$$

e

$$\dot{x}_o = \frac{b}{a} \dot{x}_i, \quad (3.43)$$

nas quais  $x_i$  e  $x_o$  são os deslocamentos lineares da alavanca nos pontos onde as forças  $f_i$  e  $f_o$  são aplicadas, respectivamente.

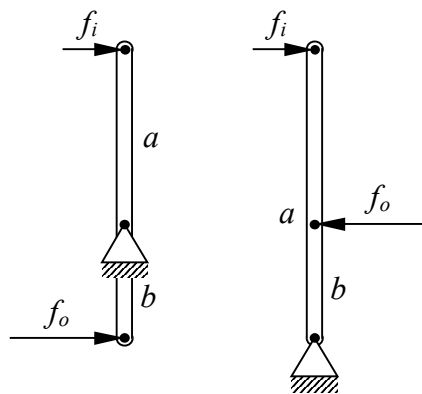


Figura 3.12 – Elemento de transformação mecânico translacional: alavanca.

Existem dois elementos transformadores de um sistema mecânico rotacional: o acoplamento por engrenagens e o acoplamento por polias e correia (Figura 3.13). A relação do elemento transformador é idêntica em ambos os casos e vale:

$$\tau_o = \frac{d_o}{d_i} \tau_i \quad (3.44)$$

onde  $\tau$  representa o torque e  $d$  o diâmetro. O subscrito  $i$  identifica a entrada e o subscrito  $o$  representa a saída. Se o transformador for um conjunto de engrenagens, pode-se igualmente utilizar a relação

$$\tau_o = \frac{n_o}{n_i} \tau_i, \quad (3.45)$$

onde  $n_i$  e  $n_o$  são os números de dentes das engrenagens de entrada e de saída, respectivamente. Os deslocamentos  $\theta$  e as velocidades angulares  $\omega$  dos eixos de entrada e saída relacionam-se entre si por meio de:

$$\frac{\theta_i}{\theta_o} = \frac{\omega_i}{\omega_o} = \frac{d_o}{d_i} = \frac{n_o}{n_i} \quad (3.46)$$

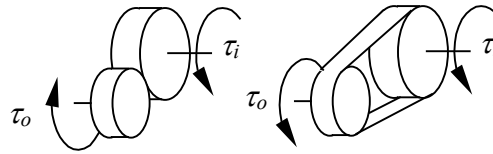


Figura 3.13 – Elementos transformadores em sistemas mecânicos rotacionais: engrenagens e polias.

O transformador elétrico é bastante conhecido, e pode ser representado pela Figura 3.14. Ele consiste de dois enrolamentos de cobre sobre um núcleo de material ferromagnético. Na verdade o transformador elétrico é um transdutor duplo, uma vez que transforma corrente elétrica da entrada em densidade magnética, e esta em corrente elétrica de saída. Em função desta comutação para densidade magnética, um transformador elétrico não opera quando a tensão (ou corrente) de alimentação for constante, mas somente quando varia no tempo. Assim pode-se dizer que a amplitude da tensão de saída  $u_o$  é proporcional à tensão de entrada  $u_i$ :

$$u_o = \frac{n_i}{n_o} u_i, \quad (3.47)$$

onde  $n_i$  é o número de espiras ou enrolamentos do primário (entrada) e  $n_o$  é o número de espiras do secundário (saída). A corrente efetiva ou equivalente de saída relaciona-se com a corrente efetiva de entrada por meio de:

$$i_o = \frac{n_o}{n_i} i_i, \quad (3.48)$$

Portanto, num transformador elétrico (válido também para os demais transformadores), o produto da corrente pela tensão é constante, isto é,  $u_o i_o = u_i i_i$ .

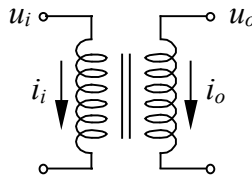


Figura 3.14 – Transformador elétrico.

O transformador hidráulico é também um transdutor duplo, já que converte pressão hidráulica em força (mecânico translacional) e esta novamente em pressão hidráulica, conforme pode ser observado na Figura 3.15. As equações que governam este transformador são:

$$q_o = \frac{A_o}{A_i} q_i, \quad (3.49)$$

onde  $A_i$  e  $A_o$  são as áreas das seções transversais dos cilindros de entrada e de saída, respectivamente. Como a força exercida no pistão é igual em ambos os lados (assumindo que a massa do pistão seja desprezível), então a pressão  $p_o$  no cilindro de saída relaciona-se com a pressão  $p_i$  no cilindro de entrada por meio de:

$$p_o = \frac{A_i}{A_o} p_i, \quad (3.50)$$

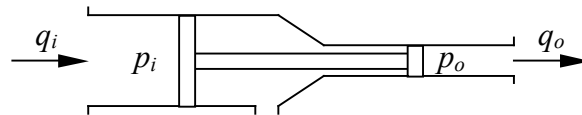


Figura 3.15 – Transformador hidráulico: pistão e cilindro duplo.

Os elementos transformadores mencionados até aqui não são únicos. De fato, uma vez que outros elementos podem ser incorporados ao transformador (como o pistão no transformador hidráulico ou o núcleo ferromagnético no transformador elétrico), então diversas outras composições podem ser realizadas. Considere-se, por exemplo, o transformador mecânico translacional mostrado na Figura 3.16, que incorpora um transformador hidráulico na sua concepção. Embora tanto a entrada quanto a saída do transformador sejam forças (ou deslocamentos lineares), não se pode contudo denominá-lo de alavanca embora o princípio de funcionamento seja semelhante. Este esquema de transformação é empregado em macacos hidráulicos. Logo, os transformadores apresentados até aqui constituem os exemplos mais simples entre as diversas possibilidades. Como ficará evidente mais adiante, o número de transdutores será ainda maior, em virtude das diversas possibilidades de combinação dos elementos individuais.

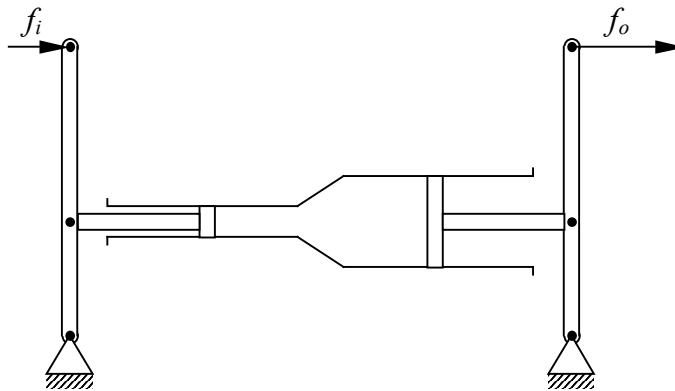


Figura 3.16 – Transformador mecânico translacional: macaco hidráulico.

**Exemplo 3.8** – Determinar a função de transferência do sistema mostrado na Figura 3.17, composto por uma fonte de tensão e um transformador, cuja relação de transformação vale  $N = n_o / n_i$ .

Solução:

Aplica-se inicialmente as relações dos elementos no circuito conectado ao primário do transformador:

$$U_i - U_1 = R_1 I_i,$$

$$U_1 - U_2 = L s I_i,$$

onde  $U_1$  e  $U_2$  são as tensões nos terminais do indutor  $L$ . A relação de transformação fornece as equações:

$$I_o = N I_i$$

$$U_2 = N U_3$$

onde  $U_3$  é a tensão na saída do transformador. Por sua vez, o circuito no secundário apresenta as relações:

$$I_o = C s (U_3 - U_o)$$

$$U_o = R_2 I_o$$

Elimina-se agora a tensão  $U_1$  das equações, de forma que

$$U_i = (R_1 + L s) I_i + U_2,$$

e substituindo agora as relações de transformação, tem-se

$$U_i = (R_1 + L s) \frac{I_o}{N} + N U_3.$$

Isolando o valor de  $U_3$  da relação do capacitor e substituindo na equação acima,

$$N C s U_i = [C s (R_1 + L s) + N^2] I_o + N^2 C s U_o.$$

A corrente  $I_o$  é isolada da relação do resistor  $R_2$  e depois de substituída resulta

$$N R_2 C s U_i = [C s (R_1 + L s) + N^2 (1 + R_2 C s)] U_o.$$

Finalmente, a função de transferência fica

$$G(s) = \frac{U_o}{U_i} = \frac{N R_2 C s}{C s (R_1 + L s) + N^2 (1 + R_2 C s)}$$

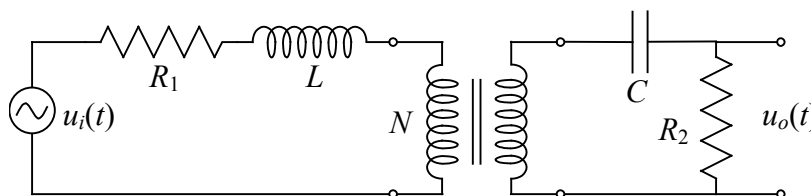


Figura 3.17 – Circuito elétrico do exemplo 3.8.

### 3.8.2 Elementos transdutores

Como dito anteriormente, um elemento transdutor consiste de um transformador a 4 terminais que transforma um tipo de energia em outro. O emprego usual de transdutores é na conversão de sinais mecânicos, elétricos, pneumáticos, hidráulicos e térmicos em sinal elétrico, com propósitos de mensuração. Em virtude da alta aplicabilidade destes elementos com tais finalidades, o termo transdutor acabou sendo erroneamente utilizado como forma geral de designar um elemento sensor. Será mantida aqui a definição usual de transdutor: um elemento que converte uma forma de energia em outra, e, neste caso, um transdutor tanto pode ser um sensor como um acionador (um motor elétrico, por exemplo, que converte eletricidade em movimento rotacional). Da mesma forma que ocorre com os transformadores, é também bastante comum que os transdutores convertam a energia numa forma intermediária antes de obtê-la na saída. O motor elétrico, por exemplo, converte a corrente elétrica em campo magnético, e este é convertido em torque no eixo. A Tabela 3.2 fornece os exemplos mais importantes de transdutores em função do tipo de entrada e do tipo de saída

É claro que outros exemplos além daqueles apresentados na tabela podem ser encontrados. Um cristal piezo-elétrico converte energia mecânica translacional (choque mecânico) diretamente em eletricidade (acendedores de fogão e isqueiros). Como o processo é reversível, pode-se fazer um oscilador mecânico usando um cristal piezo-elétrico, como os cristais de “clock” usados em circuitos eletrônicos digitais. Exceto a cremalheira, que é um dispositivo composto por duas engrenagens onde uma delas é plana (diâmetro infinito), os demais transdutores possuem equacionamento complexo, em geral não-linear. Existem dois motivos para este aumento na complexidade: a necessidade de haver uma forma intermediária de energia para transmitir a força e a dinâmica de fluidos turbulentos. Embora seja possível obter uma linearização das equações elementares dos transdutores, será visto aqui apenas o caso específico da cremalheira.

Tabela 3.2 – Principais transdutores e transformadores

Entrada: \ Saída:	Mecânico translacional	Mecânico rotacional	Elétrico	Hidráulico
Mecânico translacional	alavanca	cremalheira	eletro-ímã e núcleo	pistão-cilindro
Mecânico rotacional	cremalheira	engrenagem	gerador elétrico	bomba hidráulica
Elétrico	motor linear	motor elétrico	transformador elétrico	conjunto motor-bomba
Hidráulico	pistão-cilindro	turbina	conjunto turbina-gerador	pistão-cilindro duplo

A relação entrada-saída de um sistema cremalheira (reversível), mostrada na Figura 3.18, é dada por:

$$f_c = \frac{1}{r} \tau_e, \tag{3.51}$$

onde  $f_c$  é a força exercida pela ou na cremalheira,  $\tau_e$  é o torque exercido na ou pela engrenagem e  $r$  é o raio médio da engrenagem. O deslocamento  $x_c$  e a velocidade  $v_c$  da cremalheira relacionam-se com o deslocamento  $\alpha_e$  ou velocidade angular  $\omega_e$  da engrenagem por meio de:

$$\frac{\alpha_e}{x_c} = \frac{\omega_e}{v_c} = \frac{1}{r} \tag{3.52}$$

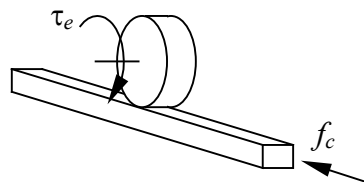


Figura 3.18 – Elemento transdutor entre sistema mecânico translacional e rotacional: engrenagem-cremalheira.

**Exemplo 3.9** – Determinar a função de transferência do sistema composto por uma cremalheira, cujo raio da engrenagem é  $r$ , como mostrado na Figura 3.19, com atrito no mancal de deslizamento linear de  $b$ , de massa  $m$  e velocidade de saída  $v(t)$ .

Solução:

As equações dos elementos mecânicos rotacionais levam a

$$T_i(s) + T_1 = I s \Omega_1$$

$$T_1 = \frac{K}{s} (\Omega_2 - \Omega_1),$$

enquanto que a transformação imposta pela cremalheira impõe

$$T_1 = r F_3$$

$$V_o = r \Omega_2.$$

Os elementos mecânicos translacionais possuem as seguintes equações

$$F_3 + F_k + F_b = m s V_o$$

$$F_k = -\frac{k}{s} V_o,$$

$$F_b = -b V_o.$$

Nas equações acima,  $T_1$  é a transformada do torque transmitido pela mola rotacional  $K$ ,  $\Omega_1$  é a transformada da velocidade angular na junção entre a inércia  $I$  e a mola rotacional,  $\Omega_2$  refere-se à velocidade angular na junção entre a mola e a engrenagem, e  $F_3$  é a transformada da força aplicada pela engrenagem na cremalheira. As quatro primeiras equações fornecem

$$r K T_i = I K s V_o + r^2 (K - I s^2) F_3,$$

enquanto que as três seguintes resultam

$$F_3 = \left( m s + \frac{k}{s} + b \right) V_o$$

Substituindo esta última na anterior e agrupando os termos a função de transferência fica:

$$G(s) = \frac{V_o}{T_i} = \frac{r K s}{I K s^2 - r^2 (K + I s^2) (m s^2 + b s + k)}$$

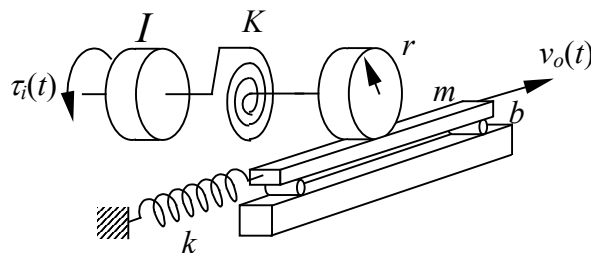


Figura 3.19 – Sistema mecânico composto por uma cremalheira, referente ao exemplo 3.9.

### 3.9 Exercícios

- 1) Obter a função de transferência do circuito elétrico mostrado na Figura 3.a por meio da impedância equivalente. A entrada é a tensão  $u(t)$  e a saída é a corrente  $i(t)$  que passa pela fonte de tensão.

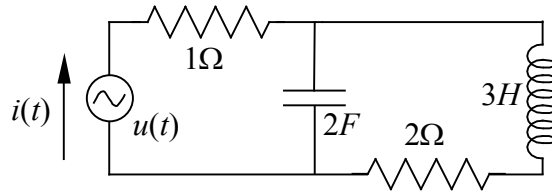


Figura 3.a – Sistema elétrico do exercício 1.

Resposta:

$$G(s) = \frac{6s^2 + 4s + 1}{6s^2 + 7s + 3}$$

- 2) Obter a função de transferência do sistema hidráulico mostrado na Figura 3.b, composto por uma capacitância fluida  $C$  em série com uma inércia fluida  $I$  e uma resistência  $R$ . A entrada é a vazão  $q_e(t)$  e a saída é a vazão  $q_s(t)$ .

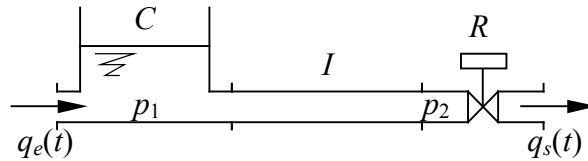


Figura 3.b – Sistema hidráulico do exercício 2.

Resposta:

$$G(s) = \frac{Q_s}{Q_e} = \frac{1}{ICs^2 + RCs + 1}$$

- 3) Considerar o sistema mecânico mostrado na Figura 3.c. Calcular a função de transferência do sistema, supondo como entrada a força  $f(t)$  aplicada à massa  $m_1$  e como saída a velocidade  $v(t)$  desta massa. O atrito entre as massas  $m_1$  e  $m_2$  é dado por  $b_1$ , entre as massas  $m_2$  e  $m_3$  é  $b_2$ , e entre as massas  $m_1$  e  $m_3$  é  $b_3$ . Não há atrito entre a massa  $m_1$  e o solo.



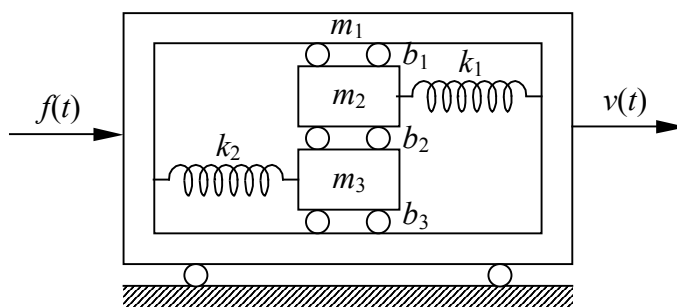


Figura 3.c – Sistema mecânico do exercício 3.

Resposta:

$$G = \frac{(m_2 m_3 - b_2^2) s^2}{a s^2 - b s - c},$$

com  $a = m_1(m_2 m_3 - b_2^2) - m_3 b_1^2 - m_2 b_3^2 - 2b_1 b_2 b_3$ ,  $b = 2(m_3 b_1 k_1 + m_2 b_3 k_2 + b_1 b_2 k_2 + b_2 b_3 k_1)$ ,  
e  $c = m_2 k_2^2 + m_3 k_1^2 + 2b_2 k_1 k_2$ .

- 4) Obter a transformada de Laplace do sistema mecânico massa-mola-amortecedor mostrado na Figura 3.d, cuja entrada é a força  $u(t)$  e a saída é o deslocamento linear  $y(t)$ .

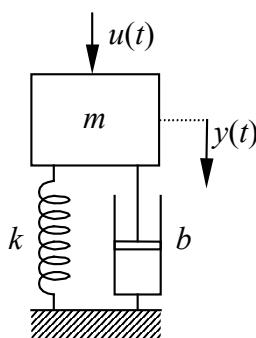


Figura 3.d – Sistema mecânico massa-mola-amortecedor.

Resposta:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

- 5) Obter a transformada de Laplace do sistema mecânico massa-mola-amortecedor mostrado na Figura 3.e, tal que  $e(t)$  é a entrada e  $r(t)$  é a saída do sistema. Nota-se que tanto a entrada quanto a saída podem ser deslocamentos, velocidades ou forças. Pedese as transformadas de Laplace nos seguintes casos:
- A entrada  $e(t)$  é o deslocamento  $x(t)$  provocado na mola-amortecedor, e a saída  $r(t)$  é igual ao deslocamento  $y(t)$  da massa  $m$ .
  - A entrada  $e(t)$  é a velocidade  $v(t)$  da extremidade mola-amortecedor, e a saída  $r(t)$  é o deslocamento  $y(t)$  da massa  $m$ .

- c) A entrada  $e(t)$  é o deslocamento  $x(t)$  da extremidade mola-amortecedor, e a saída  $r(t)$  é a velocidade  $w(t)$  da massa  $m$ .
- d) A entrada  $e(t)$  é a velocidade  $v(t)$  da extremidade mola-amortecedor, e a saída  $r(t)$  é a velocidade  $w(t)$  da massa  $m$ .

Porque a extremidade mola-amortecedor, ou seja,  $e(t)$ , não pode ser a saída na forma de deslocamento ou de velocidade, com  $r(t)$  representando a entrada?

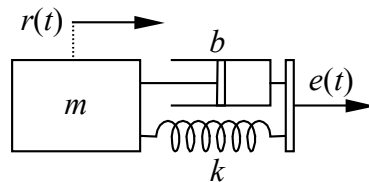


Figura 3.e – Sistema mecânico do exemplo 5.

Respostas:

- a)  $\frac{R(s)}{E(s)} = \frac{bs + k}{ms^2 + bs + k}$ ,      b)  $\frac{R(s)}{E(s)} = \frac{bs + k}{s(ms^2 + bs + k)}$
- c)  $\frac{R(s)}{E(s)} = \frac{s(bs + k)}{ms^2 + bs + k}$ ,      d)  $\frac{R(s)}{E(s)} = \frac{bs + k}{ms^2 + bs + k}$

- 6) Obter a função de transferência do circuito elétrico mostrado na Figura 3.f por meio da impedância equivalente. A entrada é a tensão  $u(t)$  e a saída é a corrente  $i(t)$  que passa pela fonte de tensão.

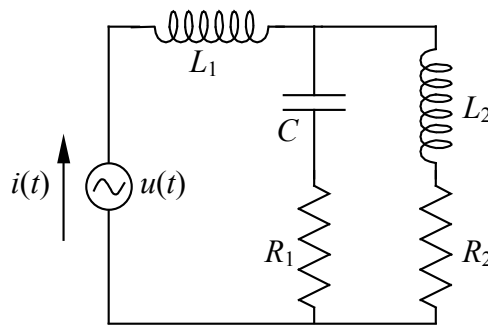


Figura 3.f – Sistema elétrico do exercício 6.

Resposta:

$$\frac{U(s)}{I(s)} = \frac{L_1 L_2 C s^3 + [(R_1 + R_2)L_1 + R_1 L_2] C s^2 + (L_1 + L_2 + R_1 R_2 C) s + R_2}{L_2 C s^2 + (R_1 + R_2) C s + 1}$$

- 7) Calcular a função de transferência do circuito elétrico mostrado na Figura 3.g por meio da resolução de sistema de equações lineares. A entrada é a tensão  $u(t)$  e a saída é a tensão  $v(t)$ .

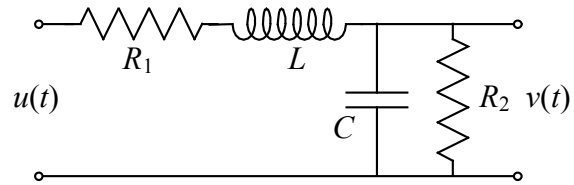


Figura 3.g – Sistema elétrico do exercício 7.

Resposta:

$$\frac{V(s)}{U(s)} = \frac{R_2}{LCR_2 s^2 + (R_1 R_2 C + L) s + R_1 + R_2}$$



## 4 TRANSFORMADAS INVERSAS DE FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA

Na análise de sistemas lineares é comum que as funções de transferência tenham ordem elevada, e apresentem a relação saída/entrada como uma expressão matemática normalmente complexa. As tabelas de transformada de Laplace, contudo, apresentam fórmulas que podem ser aplicadas apenas a sistemas relativamente simples. Embora seja possível obter a transformada inversa para qualquer função de transferência a partir da definição da transformada, é muito mais fácil simplificá-la sempre que possível, para que as fórmulas e propriedades tabeladas possam ser empregadas. A simplificação é feita usando-se a decomposição da função de transferência em frações parciais, que serão vistas neste capítulo.

### 4.1 Transformada inversa de Laplace para sistemas lineares

Até este ponto, mostrou-se que a transformada de Laplace é uma ótima ferramenta de análise de sistemas dinâmicos. Neste capítulo será mostrado como reverter esta transformação para retornar ao domínio do tempo. Como foi mostrado, um sistema linear a coeficientes constantes possui função de transferência a condições iniciais nulas dada por

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (4.1)$$

Se a função  $G(s)$  puder ser posta na forma

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) + \dots + G_n(s), \quad (4.2)$$

então pela propriedade da linearidade da transformada de Laplace, a transformada inversa será obtida de

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}(G_1(s)) + \mathcal{L}^{-1}(G_2(s)) + \dots + \mathcal{L}^{-1}(G_n(s)) \quad (4.3)$$

ou

$$g(t) = g_1(t) + g_2(t) + \dots + g_n(t) \quad (4.4)$$

Será mostrado, na seção seguinte, como decompor a função de transferência em parcelas individuais.

### 4.2 Decomposição em frações parciais para $m < n$ .

Para que  $G(s)$  possa ser decomposta numa soma  $G_1 + G_2 + \dots + G_n$ , será necessário decompô-la em frações parciais. Por sua vez, a decomposição em frações parciais requer que se conheçam antecipadamente as raízes do polinômio do denominador, ou seja, as raízes de  $X(s)$ . Considera-se então que as raízes deste polinômio sejam  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Estas raízes são denominadas de **pólos da função de transferência**. Analogamente, as raízes de  $Y(s)$ ,  $z_1, z_2, \dots, z_m$ , são conhecidas como **zeros da função de transferência**. Nota-se que tanto quanto os pólos, também os zeros são em geral números complexos. A decomposição em frações parciais requer também que  $m < n$ , ou seja, o grau do polinômio do numerador deva ser menor do que o grau do polinômio do denominador. Posteriormente o processo de decomposição em frações parciais será estendido para o caso em que  $m \geq n$ .

Exprimindo a função de transferência em termos de seus pólos e zeros tem-se

$$G(s) = \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}. \quad (4.5)$$

Como os termos  $s - p_i$  são submúltiplos do denominador, pode-se escrever a função de transferência na forma de uma soma de frações parciais:

$$G(s) = \frac{c_1}{(s - p_1)} + \frac{c_2}{(s - p_2)} + \cdots + \frac{c_n}{(s - p_n)}, \quad (4.6)$$

onde os coeficientes  $c_i$  são constantes. Na verdade, estes parâmetros são também polinômios em  $s$ , com grau inferior ao grau do denominador de cada fração. Como o grau do denominador das frações é unitário, então o grau do numerador é nulo, ou seja, uma constante. Estas constantes serão determinadas uma a uma multiplicando-se a função de transferência por cada um dos denominadores das frações. Para o pólo  $p_k$  este processo leva a

$$(s - p_k) G(s) = \frac{(s - p_k)}{(s - p_1)} c_1 + \frac{(s - p_k)}{(s - p_2)} c_2 + \cdots + c_k + \cdots + \frac{(s - p_k)}{(s - p_n)} c_n. \quad (4.7)$$

Se agora for feito  $s = p_k$  na expressão acima, todos os termos do segundo membro serão anulados, exceto aquele a que pertence o pólo  $k$ , ou seja:

$$c_k = [(s - p_k) G(s)]_{s=p_k}, \text{ para } k = 1, 2, \dots, n. \quad (4.8)$$

Para obter estes coeficientes não é necessário, na verdade, calcular os zeros da função de transferência, bastando apenas colocá-la na forma:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}. \quad (4.9)$$

Desta forma para cada coeficiente deve-se calcular apenas a relação

$$c_k = \left[ \frac{Y(s)}{(s - p_1) \cdots (s - p_{k-1})(s - p_{k+1}) \cdots (s - p_n)} \right]_{s=p_k}, \quad (4.10)$$

ou simplesmente

$$c_k = \frac{Y(p_k)}{(p_k - p_1) \cdots (p_k - p_{k-1})(p_k - p_{k+1}) \cdots (p_k - p_n)}. \quad (4.11)$$

Vários métodos podem ser usados para se encontrar os pólos e zeros da função de transferência. Pode-se, por exemplo, traçar o gráfico da função e verificar os locais onde a curva cruza o eixo das abscissas. Este método fornece uma forma eficiente de se encontrar as raízes reais, porém não é muito apropriado nas raízes complexas. Métodos baseados em soluções analíticas (como a fórmula atribuída a Bhaskara para equações quadráticas) conseguem resolver as raízes até polinômios de quarta ordem, porém com aumento crescente da complexidade com o aumento da ordem. Métodos numéricos usam algoritmos de busca, como o de Newton-Raphson, e fornecem as raízes dentro de um limite de precisão. Além disso, deixam de encontrar raízes se o polinômio apresentar derivadas acentuadas em certos valores do argumento. Se o polinômio apresentar grau ímpar, então uma das raízes será certamente real, enquanto que as outras poderão ou não ser complexas conjugadas. Para encontrar esta raiz real basta fazer uma busca, por substituição de valores na função. Pode ser que um destes valores anule o polinômio, ou então que a função mude de sinal, o que indica

haver uma raiz entre os dois últimos argumentos testados. Uma vez que uma raiz tenha sido encontrada, procede-se à redução da ordem do polinômio, que consiste em encontrar um novo polinômio cuja ordem seja uma unidade menor do que o polinômio original. Seja então o polinômio  $X(s)$  dado por:

$$X(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \quad (4.12)$$

e seja também  $p$  uma raiz encontrada para este polinômio. Neste caso, deve haver um polinômio de grau  $n - 1$  que satisfaz a igualdade:

$$X(s) = (s - p)(d_{n-1} s^{n-1} + d_{n-2} s^{n-2} + \dots + d_1 s + d_0) \quad (4.13)$$

Expandindo este último e igualando-se os polinômios, tem-se:

$$d_{n-1} s^n + (d_{n-2} - p d_{n-1}) s^{n-1} + \dots + (d_0 - p d_1) s - p d_0 = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \quad (4.14)$$

Para que os dois polinômios sejam iguais, seus coeficientes devem ser todos iguais, o que leva ao resultado:

$$\begin{aligned} d_{n-1} &= a_n \\ d_{n-2} &= a_{n-1} + p d_{n-1} \\ d_{n-3} &= a_{n-2} + p d_{n-2} \\ &\dots \\ d_0 &= a_1 + p d_1 \\ d_0 &= -a_0 / p \end{aligned} \quad (4.15)$$

que fornece um conjunto de equações que permite encontrar todos os coeficientes do novo polinômio. Este sistema pode ser facilmente resolvido, iniciando pelo primeiro elemento  $d_{n-1}$  e utilizando este para o cálculo do seguinte ( $d_{n-2}$ ) e assim por diante. Nota-se que a última equação é redundante, uma vez que  $d_0$  já havia sido encontrado na igualdade anterior. Pode-se então utiliza-la para verificar se não ocorreu erro nos cálculos.

Após encontrar o novo polinômio, deve-se então repetir o processo de busca de uma raiz e uma nova redução da ordem, até que se tenha um polinômio quadrático, cujas raízes podem ser encontradas com a fórmula de Bhaskara.

**Exemplo 4.1 – Decompor a função de transferência**

$$G(s) = \frac{4s - 2}{s^3 - 2s^2 - s + 2}$$

em frações parciais

Solução:

Deve-se inicialmente obter as raízes do denominador (pólos da função de transferência). Como o polinômio do denominador é cúbico, pode-se utilizar a solução de equações cúbicas para obter estas raízes. Porém, é mais intuitivo examinar a equação e constatar que  $s = 1$  é uma das raízes. Caso não fosse, pode-se tentar novos valores entre os números naturais (2, 3, ...), até que um deles anule o polinômio no denominador, ou então até que um deles altere o sinal de  $G(s)$  (de positivo para negativo ou vice-versa). Neste caso, existe uma raiz entre os

dois últimos valores testados, e deve-se então testar novos valores dentro deste intervalo. Agora que uma das raízes é conhecida, então deve existir um polinômio do segundo grau cujos coeficientes são ainda desconhecidos que, se multiplicado pela raiz encontrada  $(s - 1)$ , origina o polinômio do terceiro grau, isto é:

$$(s - 1)(as^2 + bs + c) = s^3 - 2s^2 - s + 2,$$

ou

$$as^3 + (b - a)s^2 + (c - b)s - c = s^3 - 2s^2 - s + 2,$$

A igualdade entre os coeficientes de mesma potência permite obter cada um dos coeficientes do polinômio do segundo grau:

$$a = 1$$

$$b - a = -2$$

$$c - b = -1$$

$$-c = 2$$

Nota-se que existem 4 equações e 3 incógnitas, o que significa que uma das equações é descartável. A solução deste sistema leva a  $a = 1$ ,  $b = -1$  e  $c = -2$ , o que resulta para a função de transferência:

$$G(s) = \frac{4s - 2}{(s - 1)(s^2 - s - 2)}.$$

As raízes do polinômio quadrático podem agora ser obtidas facilmente, resultando:

$$s_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 + \sqrt{1 + 8}}{2} = 2$$

e

$$s_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 - \sqrt{9}}{2} = -1.$$

Como consequência, a função de transferência pode ser escrita como:

$$G(s) = \frac{4s - 2}{(s - 2)(s + 1)(s - 1)}.$$

A separação desta função em frações parciais irá produzir

$$G(s) = \frac{c_1}{s - 2} + \frac{c_2}{s + 1} + \frac{c_3}{s - 1}.$$

Os coeficientes  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  podem agora ser obtidos pela formulação apresentada anteriormente.

$$c_k = [(s - p_k) G(s)]_{s=p_k},$$

onde os  $p_k$  são os pólos encontrados:  $p_1 = 2$ ,  $p_2 = -1$  e  $p_3 = 1$ . Com isso, tem-se



$$c_1 = [(s-2)G(s)]_{s=2} = \left[ \frac{4s-2}{(s+1)(s-1)} \right]_{s=2} = \frac{8-2}{3} = 2,$$

$$c_2 = [(s+1)G(s)]_{s=-1} = \left[ \frac{4s-2}{(s-2)(s-1)} \right]_{s=-1} = \frac{-4-2}{6} = -1,$$

$$c_3 = [(s-1)G(s)]_{s=1} = \left[ \frac{4s-2}{(s+1)(s-2)} \right]_{s=1} = -\frac{4-2}{2} = -1,$$

o que resulta para a função de transferência:

$$G(s) = \frac{2}{s-2} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-1}.$$

### 4.3 Decomposição em frações parciais quando $m \geq n$ .

Quando o grau do polinômio do numerador é maior ou igual ao grau do polinômio do denominador, deve-se inicialmente encontrar um polinômio que resulte da divisão de  $Y(s)$  por  $X(s)$ . Uma vez que o resultado desta divisão não é exato, surge um polinômio de resto cujo grau é menor do que  $n$ . Em outras palavras, deve-se encontrar  $Q(s)$  e  $R(s)$  tais que

$$Y(s) = Q(s)X(s) + R(s) \quad (4.16)$$

onde o grau de  $Q(s)$  deve ser a diferença entre os graus de  $Y(s)$  e  $X(s)$ , ou  $m - n$ , e o grau de  $R(s)$  é no máximo igual a  $n - 1$ . Seja então  $Q(s)$  e  $R(s)$  dados por:

$$Q(s) = q_{m-n}s^{m-n} + q_{m-n-1}s^{m-n-1} + \dots + q_1s + q_0 \quad (4.17)$$

e

$$R(s) = r_{n-1}s^{n-1} + r_{n-2}s^{n-2} + \dots + r_1s + r_0 \quad (4.18)$$

Ao multiplicar-se  $Q(s)$  por  $X(s)$  e somar-se com  $R(s)$ , obtém-se um polinômio de grau  $m$ , cujos coeficientes devem ser iguais aos de  $Y(s)$ . Isto permite calcular os coeficientes tanto de  $Q(s)$  quanto de  $R(s)$  um a um, igualando-se os coeficientes de mesma potência em  $s$ . A nova função de transferência fica então dada por:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = Q(s) + \frac{R(s)}{X(s)} \quad (4.19)$$

**Exemplo 4.2** – Reduzir a função de transferência  $G(s)$  dada a seguir em frações parciais

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^3 + 5s^2 + 9s + 7}{(s+1)(s+2)}.$$

Solução:

Para reduzir  $G(s)$  em frações parciais, deve-se obter os polinômios  $Q(s)$  e  $R(s)$ , uma vez que  $m = 3 > n = 2$ . O grau de  $Q(s)$  será de  $m - n = 1$ , e de  $R(s)$  será  $n - 1 = 1$ . Logo, estes polinômios são formados por

$$Q(s) = q_1 s + q_0,$$

e

$$R(s) = r_1 s + r_0.$$

Disto tira-se que

$$Y(s) = (q_1 s + q_0)X(s) + r_1 s + r_0,$$

ou

$$s^3 + 5s^2 + 9s + 7 = q_1 s^3 + (3q_1 + q_0)s^2 + (2q_1 + 3q_0 + r_1)s + 2q_0 + r_0.$$

Comparando-se os coeficientes de mesmo grau em  $s$ , tem-se as equações:

$$q_1 = 1$$

$$3q_1 + q_0 = 5$$

$$2q_1 + 3q_0 + r_1 = 9$$

$$2q_0 + r_0 = 7$$

que permitem obter  $q_1 = 1$ ,  $q_0 = 2$ ,  $r_1 = 1$ ,  $r_0 = 3$ . Finalmente, a função de transferência fica

$$G(s) = s + 2 + \frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)},$$

e decompondo a fração restante em frações parciais, tem-se

$$H(s) = \frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{c_1}{s + 1} + \frac{c_2}{s + 2},$$

cujos coeficientes  $c_1$  e  $c_2$  valem:

$$c_1 = [(s + 1) H(s)]_{s=-1} = \left[ (s + 1) \frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)} \right]_{s=-1} = \left[ \frac{s + 3}{s + 2} \right]_{s=-1} = \frac{-1 + 3}{-1 + 2} = 2,$$

$$c_2 = [(s + 1) H(s)]_{s=-2} = \left[ \frac{s + 3}{s + 1} \right]_{s=-2} = \frac{-2 + 3}{-2 + 1} = -1,$$

resultando para  $G(s)$  a relação

$$G(s) = s + 2 + \frac{2}{s + 1} - \frac{1}{s + 2}.$$

Nota-se que é muito difícil encontrar uma transformada inversa quando  $G(s)$  é expressa na forma de uma única fração. Porém, quando decomposta em frações parciais, a transformada inversa para cada uma das frações é bem mais simples, e é fácil encontrá-la na tabela das transformadas de Laplace. Aplicando estas transformadas inversas, e supondo condições iniciais nulas, tem-se:

$$g(t) = \frac{d\delta(t)}{dt} + 2\delta(t) + 2e^{-t} - e^{-2t}.$$

#### 4.4 Decomposição em frações quando $G(s)$ possui pólos múltiplos.

A decomposição em frações parciais vista até agora é válida apenas quando as raízes do denominador são simples. Se estas raízes forem duplas ou triplas, ou se elas possuírem multiplicidade maior do que 1, então a formulação utilizada já não se aplica, uma vez que geraria frações idênticas nestas raízes. Portanto, se um dado pólo  $p_k$  possuir multiplicidade  $l$ , isto é, se

$$X(s) = (s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_k)^l \cdots (s - p_n), \quad (4.20)$$

então o método de expansão em frações parciais deve ser modificado da seguinte forma:

$$G(s) = \frac{c_1}{s - p_1} + \frac{c_2}{s - p_2} + \dots + \frac{c_{k1}}{s - p_k} + \frac{c_{k2}}{(s - p_k)^2} + \dots + \frac{c_{kl}}{(s - p_k)^l} + \dots + \frac{c_n}{s - p_n}, \quad (4.21)$$

ou seja, surgem frações que dependem de potências de  $s - p_k$  de 1 até a potência  $l$ . O cálculo das frações cujos pólos possuem multiplicidade 1, isto é,  $c_i$ , com  $i = 1, \dots, n$ ,  $i \neq k$ , é feito de forma convencional, como estabelecido na seção anterior. Resta portanto analisar como são calculados os coeficientes  $c_{kj}$ ,  $j = 1, \dots, l$ . Multiplicando  $G(s)$  por  $(s - p_k)^l$  tem-se

$$\begin{aligned} (s - p_k)^l G(s) &= \frac{(s - p_k)^l}{s - p_1} c_1 + \dots + (s - p_k)^{l-1} c_{k1} + (s - p_k)^{l-2} c_{k2} + \dots + \\ &+ (s - p_k) c_{k(l-1)} + c_{kl} + \dots + \frac{(s - p_k)^l}{s - p_n} c_n \end{aligned}, \quad (4.22)$$

Avaliando-se esta expressão no ponto  $s = p_k$  resulta que

$$c_{kl} = \left[ (s - p_k)^l G(s) \right]_{s=p_k}, \quad (4.23)$$

ou ainda

$$c_{kl} = \frac{Y(p_k)}{(p_k - p_1) \cdots (p_k - p_{k-1})(p_k - p_{k+1}) \cdots (p_k - p_n)}. \quad (4.24)$$

Para se obter os outros termos, deriva-se o produto  $(s - p_k)^l G(s)$  com relação a  $s$ , que resulta:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left[ (s - p_k)^l G(s) \right] &= \left[ \frac{l(s - p_k)^{l-1}}{s - p_1} - \frac{(s - p_k)^l}{(s - p_1)^2} \right] c_1 + \dots + (l-1)(s - p_k)^{l-2} c_{k1} + \dots + \\ &+ 2(s - p_k) c_{k(l-2)} + c_{k(l-1)} + \dots + \left[ \frac{l(s - p_k)^{l-1}}{s - p_n} - \frac{(s - p_k)^l}{(s - p_n)^2} \right] c_n \end{aligned}, \quad (4.25)$$

e novamente fazendo-se  $s = p_k$  o coeficiente  $c_{k(l-1)}$  resulta

$$c_{k(l-1)} = \frac{d}{ds} \left[ (s - p_k)^l G(s) \right]_{s=p_k}. \quad (4.26)$$

Para obter o coeficiente seguinte, deriva-se pela segunda vez  $(s - p_k)^l G(s)$  e seguindo o mesmo raciocínio tem-se

$$c_{k(l-2)} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \left[ (s - p_k)^l G(s) \right]_{s=p_k}, \quad (4.27)$$

até que

$$c_{k1} = \frac{1}{(l-1)!} \frac{d^{l-1}}{ds^{l-1}} \left[ (s - p_k)^l G(s) \right]_{s=p_k}. \quad (4.28)$$

**Exemplo 4.3** – Reduzir em frações parciais a função  $G(s)$ :

$$G(s) = \frac{4}{(s+1)^2 (s^2+1)}$$

Solução:

Esta função possui um pólo  $s_1 = -1$  de multiplicidade 2, um pólo complexo,  $s_2 = \mathbf{j}$ , e seu conjugado,  $s_3 = -\mathbf{j}$ . Portanto deseja-se desenvolver  $G(s)$  em frações parciais na forma

$$G(s) = \frac{c_{12}}{(s+1)^2} + \frac{c_{11}}{s+1} + \frac{c_2}{s-\mathbf{j}} + \frac{c_3}{s+\mathbf{j}}.$$

O coeficiente  $c_{12}$  será obtido de

$$c_{12} = \left[ (s+1)^2 G(s) \right]_{s=-1},$$

ou seja

$$c_{12} = \left[ \frac{4}{(s^2+1)} \right]_{s=-1} = 2.$$

Por sua vez, o coeficiente  $c_{11}$  é obtido por meio de

$$c_{11} = \frac{d}{ds} \left[ (s+1)^2 G(s) \right]_{s=-1},$$

ou

$$c_{11} = \frac{d}{ds} \left[ \frac{4}{(s^2+1)} \right]_{s=-1} = \left[ -\frac{8s}{(s^2+1)^2} \right]_{s=-1} = 2.$$

Os demais coeficientes valem:

$$c_2 = \left[ (s-\mathbf{j})G(s) \right]_{s=\mathbf{j}} = \left[ \frac{4}{(s+1)^2 (s+\mathbf{j})} \right]_{s=\mathbf{j}} = -1,$$

$$c_3 = \left[ (s+\mathbf{j})G(s) \right]_{s=-\mathbf{j}} = \left[ \frac{4}{(s+1)^2 (s-\mathbf{j})} \right]_{s=-\mathbf{j}} = -1,$$

e portanto

$$G(s) = \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+j} - \frac{1}{s-j}.$$

**Exemplo 4.4** – Reduzir a função de transferência dada abaixo em frações parciais.

$$G(s) = \frac{s+3}{s^5 + 4s^4 + 5s^3 + 2s^2}.$$

Solução:

Uma vez que o denominador é múltiplo de  $s^2$ , então a função acima pode ser colocada na forma

$$G(s) = \frac{s+3}{s^2(s^3 + 4s^2 + 5s + 2)},$$

que permite concluir que esta função possui dois pólos iguais a zero. As raízes do polinômio restante do terceiro grau são contudo desconhecidas. Podem-se empregar as fórmulas para solução de equação do terceiro grau, mas é mais conveniente tentar descobrir pelo menos uma das raízes. De fato, é fácil verificar que  $-1$  é uma das raízes do polinômio do denominador. Isto significa que o polinômio cúbico é múltiplo de  $s+1$ , e portanto o produto de  $s+1$  por um polinômio de segundo grau (com coeficientes ainda desconhecidos), deve originar o polinômio cúbico, ou seja:

$$(s+1)(as^2 + bs + c) = s^3 + 4s^2 + 5s + 2.$$

Expandindo o polinômio à esquerda, resulta:

$$as^3 + (b+a)s^2 + (c+b)s + c = s^3 + 4s^2 + 5s + 2.$$

Como os polinômios são iguais se e apenas se todos os seus coeficientes forem iguais, resulta então o conjunto de equações:

$$a = 1$$

$$b + a = 4$$

$$c + b = 5$$

$$c = 2$$

de onde conclui-se que  $a = 1$ ,  $b = 3$  e  $c = 2$ . Logo, a função de transferência fica

$$G(s) = \frac{s+3}{s^2(s+1)(s^2 + 3s + 2)},$$

e com isso pode-se agora determinar as raízes restantes do polinômio do segundo grau, que são iguais a  $-1$  e  $-2$ . Reescrevendo a função de transferência, e lembrando que a raiz  $-1$  é dupla, tem-se

$$G(s) = \frac{s+3}{s^2(s+1)^2(s+2)}.$$

Com isso a separação em frações parciais será feita na forma:

$$G(s) = \frac{c_{12}}{s^2} + \frac{c_{11}}{s} + \frac{c_{22}}{(s+1)^2} + \frac{c_{21}}{s+1} + \frac{c_3}{s+2}.$$

O coeficiente  $c_{12}$  é obtido de

$$c_{12} = \left[ s^2 G(s) \right]_{s=0} = \left[ \frac{s+3}{(s+1)^2(s+2)} \right]_{s=0} = \frac{3}{2},$$

e  $c_{11}$  vale

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{d}{ds} \left[ s^2 G(s) \right]_{s=0} = \frac{d}{ds} \left[ \frac{s+3}{(s+1)^2(s+2)} \right]_{s=0} = \\ &= \left[ \frac{1}{(s+1)^2(s+2)} - \frac{(s+3)[2(s+1)(s+2) + (s+1)^2]}{[(s+1)^2(s+2)]^2} \right]_{s=0} = -\frac{13}{4} \end{aligned}$$

De modo análogo,

$$\begin{aligned} c_{22} &= \left[ (s+1)^2 G(s) \right]_{s=-1} = \left[ \frac{s+3}{s^2(s+2)} \right]_{s=-1} = 2, \\ c_{21} &= \frac{d}{ds} \left[ (s+1)^2 G(s) \right]_{s=-1} = \left[ \frac{1}{s^2(s+2)} - \frac{(s+3)[2s(s+2) + s^2]}{[s^2(s+2)]^2} \right]_{s=-1} = 3, \end{aligned}$$

e o último coeficiente fica

$$c_3 = \left[ (s+2)^2 G(s) \right]_{s=-2} = \left[ \frac{s+3}{s^2(s+1)^2} \right]_{s=-2} = \frac{1}{4}.$$

A decomposição de  $G(s)$  em frações parciais fica então:

$$G(s) = \frac{3}{2s^2} - \frac{13}{4s} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{3}{s+1} + \frac{1}{4(s+2)}.$$

#### 4.5 Análise algébrica da função de transferência

Embora a decomposição em frações parciais sempre leve a uma forma simplificada da função de transferência, de tal forma a viabilizar sua transformada inversa, nem sempre este processo é o mais simples e rápido. Em algumas situações um simples arranjo nos termos da função de transferência pode colocá-la numa forma de fácil inversão. Logo, antes de decompor é conveniente examinar a função em busca de possíveis alterações visando colocá-la em formas já previamente tabuladas de funções inversas. Considere o exemplo abaixo

**Exemplo 4.5** – Obter a transformada inversa de Laplace, para condições iniciais nulas, da função de transferência mostrada a seguir. Determinar seus pólos e zeros

$$G(s) = \frac{s+1}{(s+2)^2 + 1}$$

Solução:

Percebe-se que esta função é semelhante (mas não igual) às transformadas do produto de uma exponencial pelo seno ou pelo co-seno (ver transformadas 11 e 12 da Tabela 2.1), sugerindo que talvez seja possível colocá-la numa combinação destas duas. De fato, pode-se transformar a função de transferência sem alterá-la separando-a em dois termos na forma

$$G(s) = \frac{s+2-1}{(s+2)^2+1} = \frac{s+2}{(s+2)^2+1} - \frac{1}{(s+2)^2+1}.$$

A transformada inversa agora é imediata, resultando

$$g(t) = e^{-2t} \cos t - e^{-2t} \sin t.$$

Esta função apresenta como zero o valor  $z = -1$ , e, uma vez que o denominador é um polinômio do segundo grau ( $s^2 + 4s + 5$ ), tem-se os pólos  $p_1 = -2 + \mathbf{j}$  e  $p_2 = -2 - \mathbf{j}$ .

## 4.6 Exercícios

1) Expandir em frações parciais as transformadas dadas por:

$$\text{a) } G(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+3}$$

$$\text{b) } G(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+5}$$

Quais são os pólos e os zeros destas funções?

Resposta:

$$\text{a) } G(s) = \frac{1}{2s+6} + \frac{1}{2s+2}. \text{ Os pólos são } -3 \text{ e } -1; \text{ o zero é } -2.$$

$$\text{b) } G(s) = \frac{1}{2(s+2-j)} + \frac{1}{2(s+2+j)}. \text{ Os pólos são } -2+j, \text{ e } -2-j; \text{ o zero é } -2$$

2) Expandir em frações parciais a função:

$$G(s) = \frac{3s^2 - s + 1}{s(s-1)^2(s+1)}$$

Resposta:

$$G(s) = \frac{1}{s} + \frac{3}{2(s-1)^2} + \frac{1}{4(s-1)} - \frac{5}{4(s+1)}$$



## 5 DIAGRAMA DE BLOCOS

### 5.1 Conceito de diagrama de blocos

Funções de transferência de sistemas dinâmicos podem ser representadas graficamente por meio de **diagrama de blocos**. Estes diagramas permitem compor funções de transferência complexas a partir do agrupamento de outros diagramas mais simples, ou mesmo de blocos contendo as equações elementares. Hoje existem diversos programas computacionais capazes de simular sistemas cuja dinâmica é fornecida por meio de diagramas de blocos. Exemplos de programas desta natureza são o Matlab-Simulink e o Matrix-X. A representação gráfica de um bloco é mostrada na Figura 5.1, e a relação que ele representa, no domínio da transformada de Laplace (variável complexa) é:

$$Y(s) = G(s)U(s). \quad (5.1)$$

Ou seja, a função de transferência de um bloco,  $G(s)$ , traduz a relação entre a transformada de Laplace da sua saída,  $Y(s)$ , e a transformada de Laplace da entrada,  $U(s)$ . De outra forma, a saída de um bloco é igual ao produto da entrada pela função de transferência que o bloco abriga. Nota-se, contudo, que, por definição, as entradas e saídas de um bloco devem ser postas graficamente no domínio do tempo, ou seja,  $u(t)$  e  $y(t)$ . Quando o conteúdo de um bloco (ou seja, sua função de transferência) for uma constante, denomina-se então esta constante de **ganho do bloco**.

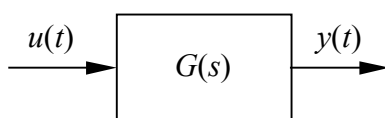


Figura 5.1 – Representação de uma função de transferência  $G(s)$  por meio de diagrama de blocos.

As ligações entre os blocos são necessariamente orientadas, indicando o fluxo de informação, ou a relação entre causa e efeito, ou ainda a definição de qual sinal é a saída e qual sinal é a entrada. Logo, toda e qualquer ligação entre blocos deve ser orientada, caso contrário não se consegue definir qual é a entrada e qual é a saída do bloco. Da definição dos blocos conclui-se também que cada bloco deve apresentar uma e apenas uma entrada e uma e apenas uma saída. Blocos com múltiplas entradas ou múltiplas saídas são permitidos apenas quando o sistema for multivariável e, neste caso, a função de transferência é dada por uma matriz.

A grande vantagem dos diagramas de blocos é a composição de vários blocos e, igualmente, a simplificação de vários blocos em somente um, o que permite obter a função de transferência total do sistema. Considerando, por exemplo, a composição de dois blocos cujas funções de transferência são  $G_1(s)$  e  $G_2(s)$  em série, como mostrado na Figura 5.2, resulta

$$Y(s) = G_1(s) X(s), \quad (5.2)$$

$$X(s) = G_2(s) U(s), \quad (5.3)$$

e substituindo a segunda equação na primeira, para eliminar a variável  $X(s)$ , tem-se que:

$$Y(s) = G_1(s) G_2(s) U(s), \quad (5.4)$$

de onde tira-se que a função de transferência de dois blocos em série é dada por:

$$G(s) = G_1(s) G_2(s), \quad (5.5)$$

ou seja, a função de transferência equivalente de dois blocos arranjados em série é dada pelo produto das funções de transferência dos blocos.

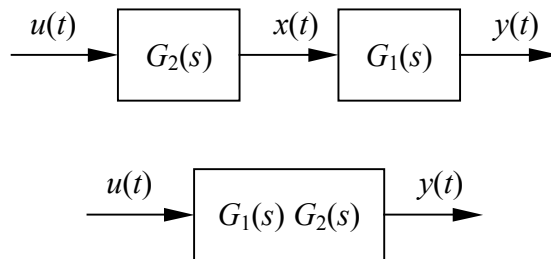


Figura 5.2 – Combinação de dois blocos arranjados em série.

As ligações entre blocos podem sofrer um número qualquer de **derivações**, isto é, o sinal transportado por elas pode ser inserido em um ou mais blocos, como ilustra a Figura 5.3. Obviamente, estas derivações indicam que a entrada em cada um dos blocos que as recebem é a mesma.

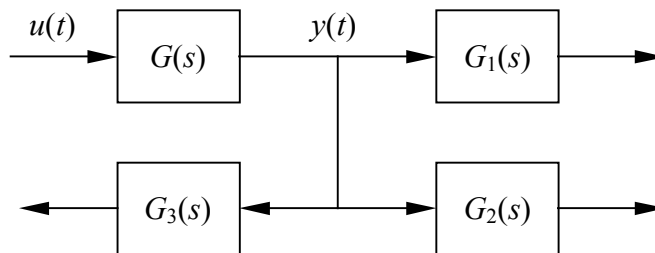


Figura 5.3 – Derivações das ligações entre blocos.

Dois sinais que transitam por ligações distintas podem ser combinados por meio de adição ou subtração, indicada por um bloco com o formato de um círculo, conhecido como **somador**, como mostrado na Figura 5.4. Se  $y(t)$  e  $x(t)$  forem sinais combinados num somador, então a saída apresentada pelo somador será  $y(t) + x(t)$  ou então  $y(t) - x(t)$ . A adição ou subtração é indicada ao lado do somador, como mostra as Figuras 5.4(a) e 5.4(b), ou então dentro do somador, como indica 5.4(c).

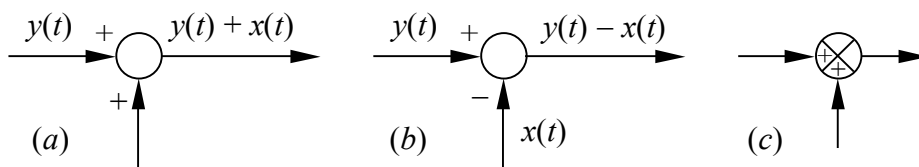


Figura 5.4 – Bloco somador: adição (a), subtração (b) e outra forma de representação gráfica (c).

A inversão do sinal de uma ligação pode ser conseguida inserindo-se um bloco de ganho unitário e negativo, ou seja um bloco cuja função de transferência é igual a  $-1$ , como mostrado na Figura 5.5.

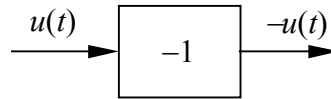


Figura 5.5 – Inversão de um sinal

É bastante comum que sistemas exibam uma **realimentação do sinal**, formando assim uma **malha fechada** ou um *loop*. Nem sempre tais malhas resultam da realimentação de sinais de controle, mas podem ser resultado da composição de equações elementares, como será mostrado adiante, em alguns exemplos. Considerando a malha fechada mostrada na Figura 5.6(a), tem-se as relações do somador e do bloco que integram a malha:

$$E(s) = R(s) - Y(s) \tag{5.6}$$

$$Y(s) = G(s) E(s) \tag{5.7}$$

Eliminando agora o sinal  $E(s)$  (interno à malha) das equações dos blocos, chega-se a

$$Y(s) = G(s) R(s) - G(s) Y(s), \tag{5.8}$$

que pode ser resolvida para  $Y(s)$ , resultando

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} R(s) \tag{5.9}$$

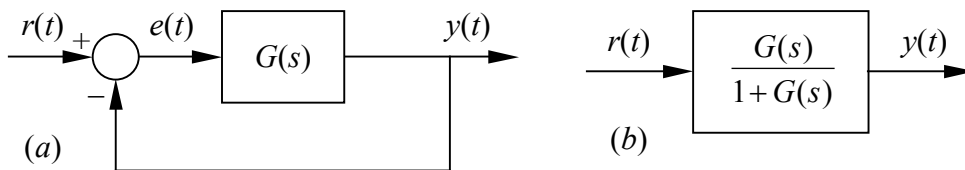


Figura 5.6 – Realimentação num diagrama de blocos (a), e bloco equivalente (b).

Nota-se que este resultado indica que a malha fechada pode ser substituída por um bloco equivalente cuja função de transferência é dada por:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G}{1 + G}, \tag{5.10}$$

como indicado na Figura 5.6(b). Se o somador indicasse uma soma entre  $y(t)$  e  $r(t)$  ao contrário da subtração, então a função de transferência seria alterada para

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G}{1 - G} \tag{5.11}$$

Em alguns sistemas a saída  $y(t)$  é transformada antes de ser adicionada ou subtraída da referência  $r(t)$ . Em geral esta transformação é uma simples mudança de escala, ou seja, trata-se de um bloco com um ganho constante. Pode acontecer, porém, que este bloco de realimentação possua uma função de transferência mais complexa, como indica a Figura 5.7. Um procedimento similar àquele realizado anteriormente permite obter a função de transferência da malha fechada neste caso, resultando:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G}{1 \pm GH}, \tag{5.12}$$

onde a adição é utilizada caso o somador apresente uma diferença entre  $r(t)$  e  $y(t)$ , e a subtração é adotada caso contrário.

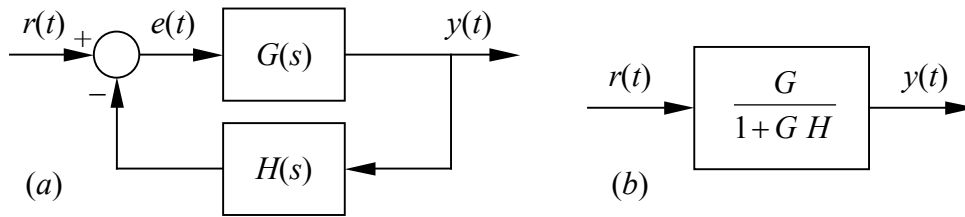


Figura 5.7 – Diagrama com uma função de transferência na malha de realimentação (a), e bloco equivalente (b).

## 5.2 Manipulação de diagrama de blocos

Diagramas de blocos podem ser sempre simplificados e reduzidos a um único bloco, desde que se conheça qual é a entrada e qual é a saída do diagrama. O processo de redução é realizado aplicando-se as definições das operações realizadas pelos blocos, de maneira semelhante àquela realizada na seção 5.1. Algumas configurações são contudo bastante típicas (ocorrem com frequência num grande número de diagramas), e isto torna mais eficiente manter uma tabela das simplificações e equivalências do que obter esta equivalência a cada novo problema. Relaciona-se na Tabela 5.1, portanto, as situações mais comuns e suas respectivas equivalências.

Além de sintetizar a dinâmica e facilitar o projeto de sistemas de controle, os diagramas de blocos podem também ser utilizados na obtenção da função de transferência de plantas razoavelmente complexas. Para obter a função de transferência de um sistema por meio de diagramas de blocos, basta seguir algumas regras simples:

- definir as variáveis necessárias para escrever as equações de cada elemento da planta, com base em regras de continuidade e equilíbrio de forças.
- construir blocos com as equações funcionais de cada elemento
- construir blocos adicionais para cada condição de continuidade e equilíbrio
- garantir que a entrada de pelo menos um bloco seja a própria entrada do sistema
- garantir que um bloco apresente como saída a própria saída da planta
- construir o diagrama de blocos fazendo ligações entre eles
- simplificar o diagrama para obter a função de transferência

Tabela 5.1 – Equivalências entre diagramas de blocos.

1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		

**Exemplo 5.1** – Obter a função de transferência do filtro elétrico mostrado na Figura 3.10 por meio de simplificação de diagrama de bloco

Solução:

A primeira regra recomenda que se definam as tensões nos terminais de  $R_1$ :  $u_1$  é a tensão no terminal comum entre  $R_1$  e  $C_1$ , e  $u_2$  é a tensão no terminal comum de  $R_2$  e  $C_2$ . Admite-se também a corrente  $i_1$  através de  $R_1$ . As equações elementares nos capacitores ficam então:

$$U_1 = \frac{1}{C_1 s} (I_i - I_1)$$

$$U_2 = \frac{1}{C_2 s} (I_1 - I_o),$$

enquanto que nos resistores são:

$$U_1 - U_2 = R_1 I_1$$

$$U_2 = R_2 I_o$$

Nota-se que a continuidade da corrente nas junções já foi considerada nas equações acima, eliminando a necessidade de blocos específicos para isso. Como a corrente  $I_i(s)$  só aparece na equação do capacitor  $C_1$  então o bloco de entrada deve ser na forma indicada na Figura 5.8 (a). O bloco de saída será dado pela equação da resistência  $R_2$ , conforme visto na Figura 5.8 (b). Com base nestes dois blocos percebe-se que os dois blocos adicionais deverão apresentar como saída a corrente  $i_1$  (entrada para o bloco de  $C_1$ ) e  $u_2$  (entrada de  $R_2$ ). O primeiro deles será o bloco referente ao resistor  $R_2$  enquanto que o segundo será o bloco do capacitor  $C_2$ , mostrados na Figura 5.8 (c) e (d). O diagrama de blocos pode agora ser construído partindo-se do bloco de entrada (a) e acrescentando-se os demais de tal forma que a saída de um bloco é a entrada do seguinte, e assim por diante, até o bloco de saída. A seqüência dos blocos é então  $C_1$ - $R_1$ - $C_2$ - $R_2$ , mostrados na Figura 5.9. A Figura 5.10 mostra as simplificações realizadas neste diagrama até a obtenção da função de transferência, que vale

$$G(s) = \frac{I_o(s)}{I_i(s)} = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_1 + R_2 C_2) s + 1}$$

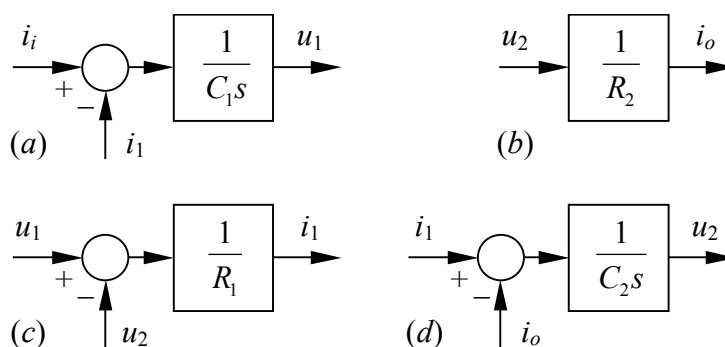


Figura 5.8 – Blocos das equações elementares relativos ao exemplo 5.1

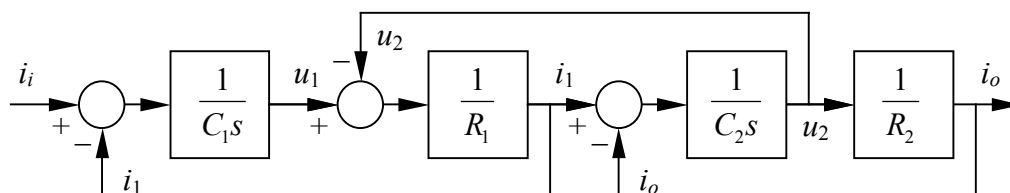


Figura 5.9 – Diagrama de blocos do exemplo 5.1

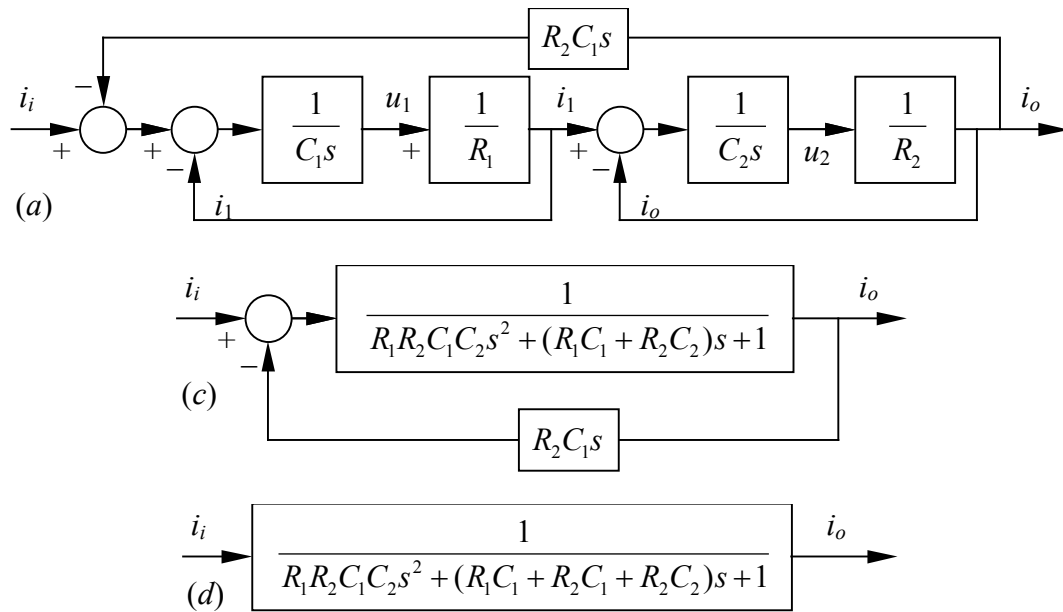


Figura 5.10 – Simplificações sucessivas do diagrama de blocos do exemplo 5.1.

**Exemplo 5.2** – Obter a função de transferência do sistema hidráulico mostrado na Figura 5.11 por meio de simplificação de diagrama de blocos. A entrada é a vazão  $q_e(t)$  e a saída é a vazão  $q_s(t)$ .

solução:

Nota-se que a vazão de entrada na inércia é igual à vazão de saída  $q_e(t)$ . Admitindo as pressões na capacitância e entrada da inércia dada por  $p_1$ , e na saída da inércia e entrada da resistência dada por  $p_2$ , então as equações dos elementos do sistema hidráulico são, para a capacitância, inércia e resistência, respectivamente:

$$Q_e - Q_s = C s P_1$$

$$P_1 - P_2 = I s Q_s$$

$$P_2 = R Q_s$$

Os blocos resultantes das equações elementares são mostrados na Figura 5.12, enquanto que o bloco do sistema e sua simplificação são mostrados a Figura 5.13. A função de transferência do sistema resulta:

$$G(s) = \frac{Q_s}{Q_e} = \frac{1}{I C s^2 + R C s + 1}$$

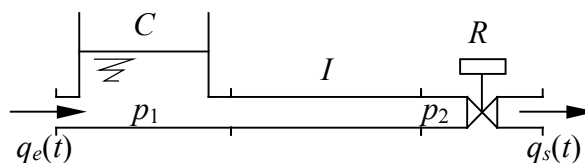


Figura 5.11 – Sistema hidráulico do exemplo 5.2.

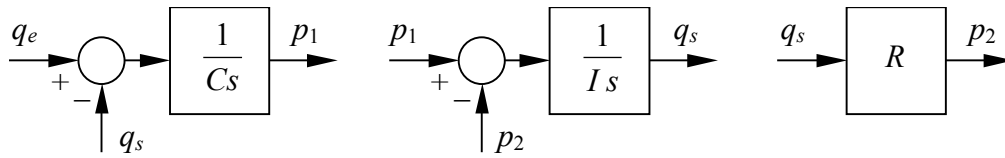


Figura 5.12 – Blocos das equações elementares relativos ao exemplo 5.2.

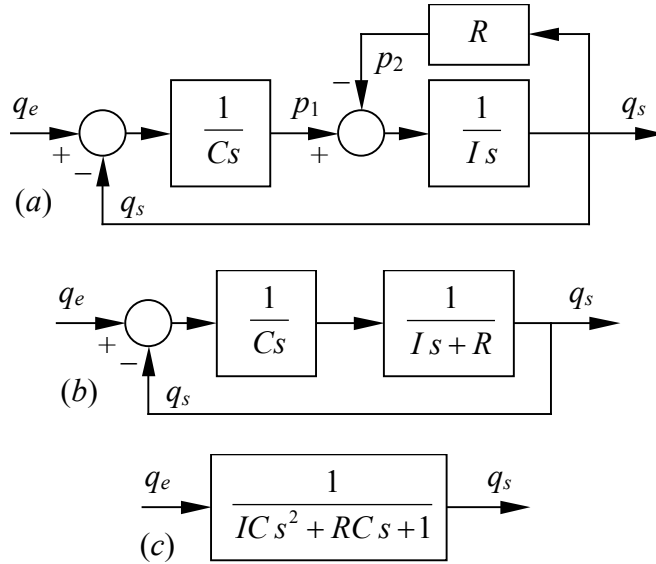


Figura 5.13 – Simplificações do diagrama de blocos do exemplo 5.2.



5.3 Exercícios

- 1) Considerar o sistema mecânico composto por uma massa, uma mola e um amortecedor, como mostrado na Figura 5.a. Dispõe-se de um atuador que desloca a extremidade da mola e do amortecedor de uma quantidade  $u(t)$  (entrada) causando um deslocamento na massa de  $y(t)$  (saída). Obter a função de transferência do sistema por meio de simplificação de diagrama de blocos.

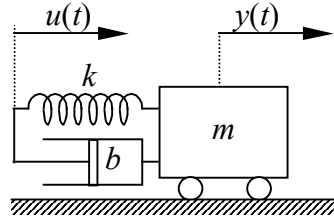


Figura 5.a – Sistema mecânico do exercício 1.

Resposta:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{bs + k}{ms^2 + bs + k}$$

- 2) Resolver o sistema mostrado na Figura 5.b (exemplo 3.5) por meio de diagrama de blocos. A entrada deste sistema é a tensão  $e_i(t)$  e a saída é a tensão  $e_o(t)$ .

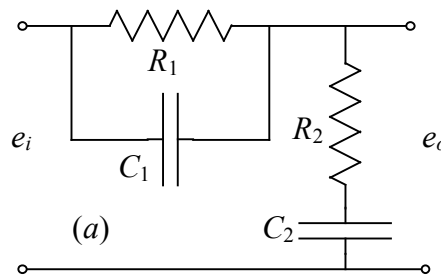


Figura 5.b – Circuito elétrico referente ao exercício 2.

Resposta:

$$G(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2) s + 1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) s + 1}$$

- 3) Simplificar os diagramas de blocos mostrados na Figura 5.c

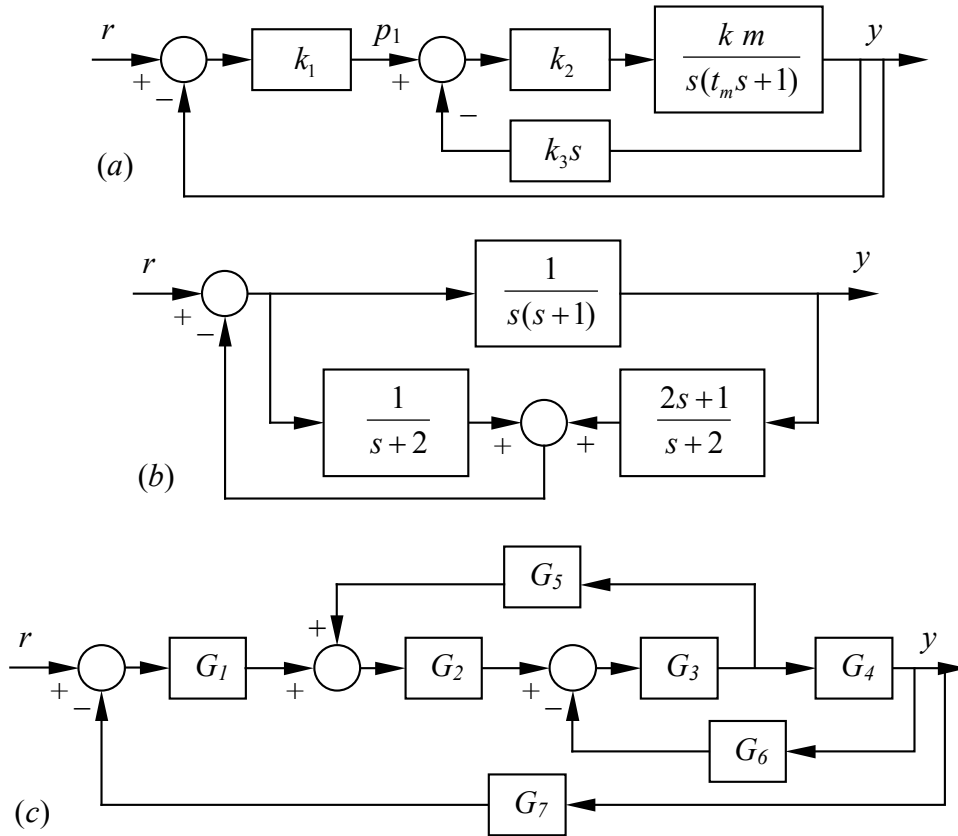


Figura 5.c – Diagramas de blocos do exercício 3.

Resposta:

$$a) G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k_1 k_2 k m}{t_m s^2 + (k_2 k_3 k m + 1)s + k_1 k_2 k m}, \quad b) G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{s+2}{s^3 + 4s^2 + 5s + 1}$$

$$c) G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{G_1 G_2 G_3 G_4 G_7 + G_3 G_4 G_6 - G_2 G_3 G_5 + 1}$$

- 4) Resolver o sistema mostrado na Figura 5.d por meio de diagrama de blocos. A entrada deste sistema é a força  $f(t)$  e a saída é o deslocamento  $x(t)$ .

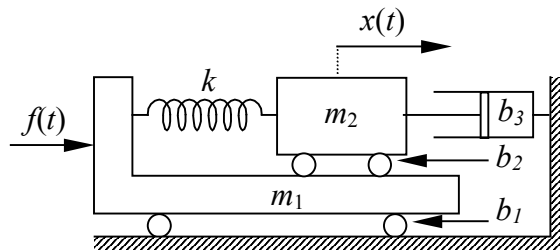


Figura 5.d – Sistema mecânico do exercício 4.

Resposta:

$$G(s) = \frac{b_2s + k_1}{s \{ m_1m_2s^3 + (m_1b_2 + m_1b_3 - m_2b_1)s^2 + [(m_1 + m_2)k_1 - b_1(b_2 + b_3)]s + k_1(b_1 - b_3) \}}$$



## 6 ANÁLISE DO TRANSIENTE DE RESPOSTA

Freqüentemente os sistemas dinâmicos submetidos a ações sofrem bruscas alterações num curto intervalo de tempo, e depois se mantêm constantes por longos períodos. O comportamento dinâmico destes sistemas quando sujeito a tais ações pode ser visto sob duas perspectivas diferentes e complementares: o comportamento num curto período, logo após a aplicação da ação, e o comportamento no longo período, quando sua dinâmica torna-se estável (ou não, dependendo do sistema) ou repetitiva. O comportamento de curto período é conhecido como **resposta transitória**, **transiente de resposta** ou simplesmente **transiente**. O comportamento após o estabelecimento de condições perenes é conhecido **resposta em regime permanente**.

### 6.1 Transiente de resposta

Sistemas dinâmicos lineares exibem comportamentos distintos para diferentes funções de excitação ou referência de entrada. O regime permanente pode ser oscilatório ou estático, enquanto que o transiente pode ser amortecido ou não. É conveniente, portanto, definir o conceito de **erro de regime permanente**, ou  $e_{rp}$ , como sendo a diferença entre a referência  $r(t)$  e a resposta do sistema  $c(t)$  quando o tempo tende a infinito:

$$e_{rp} = \lim_{t \rightarrow \infty} [r(t) - c(t)]. \quad (6.1)$$

Este erro reflete a capacidade do sistema seguir naturalmente a excitação dada ou dela se desviar no regime permanente. O erro apresentado pelo sistema pode ser obtido por meio da transformada de Laplace, ou seja:

$$E(s) = R(s) - C(s) = R(s) [1 - G(s)], \quad (6.2)$$

ou ainda por diagrama de blocos, como mostrado na Figura 6.1

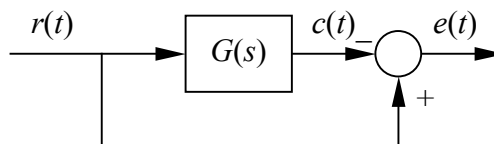


Figura 6.1 – Diagrama de blocos do erro do sistema com relação à entrada.

O teorema do valor final (propriedade  $h$  da Seção 2.2) permite concluir que o erro em regime permanente pode ser igualmente obtido a partir de:

$$e_{rp} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s [R(s) - C(s)]. \quad (6.3)$$

Até agora foi visto o comportamento dinâmico dos sistemas com base na sua função de transferência. Não foi analisado, porém, o efeito da função de excitação (entrada, termo forçante ou referência) neste comportamento. Muito embora este termo possa assumir qualquer valor, o comportamento dinâmico de um sistema pode ser caracterizado razoavelmente bem se for assumido que esta entrada possa ser escolhida dentro de um pequeno número de funções previamente definidas. Uma vez que sistemas dinâmicos são comumente submetidos a funções descontínuas, é conveniente portanto analisar a resposta com base nas funções já conhecidas como a função degrau unitário, impulso unitário e rampa. Estas funções, ademais, possuem transformadas de Laplace conhecidas e simples.

Considerando ainda a analogia que existe entre os sistemas mecânicos, elétricos e hidráulicos (e também térmicos), pode-se restringir a análise realizada aqui apenas a um deles, uma vez que nos sistemas análogos o comportamento dinâmico é idêntico. Melhor ainda, a análise da resposta pode ser feita tendo como base a função de transferência dos sistemas mais comuns, de primeira e segunda ordens, ou seja, nos quais o grau do polinômio do denominador é igual a 1 ou 2, sem se preocupar se o sistema é mecânico ou elétrico. Sistemas de grau maior do que 2 possuem comportamento dinâmico que se aproxima, na maior parte deles, aos sistemas de segunda ordem e portanto não necessitam ser analisados.

## 6.2 Sistemas de primeira ordem

Sistemas de primeira ordem possuem função de transferência na forma

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{T s + 1}, \quad (6.4)$$

onde  $C(s)$  é a transformada de Laplace da saída e  $R(s)$  é a transformada da entrada (referência).  $T$  é uma constante, conhecida como **constante de tempo**. Será analisado, agora, o comportamento dinâmico desta função em 3 situações distintas para o sinal de entrada  $R(s)$ : degrau unitário, impulso unitário e rampa.

### 6.2.1 Resposta do sistema de primeira ordem ao degrau unitário

Se o termo forçante ou a entrada do sistema for um degrau unitário  $r(t) = \mathbf{1}(t)$ , a resposta do sistema  $C_{du}(s)$  fica:

$$C_{du}(s) = \frac{1}{s(T s + 1)}, \quad (6.5)$$

pois a transformada do degrau unitário é  $1/s$ . Decompondo  $C_{du}(s)$  em frações parciais, tem-se

$$C_{du}(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/T}, \quad (6.6)$$

cuja transformada inversa de Laplace vale

$$c_{du}(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}, \quad (6.7)$$

e cujo gráfico é mostrado na Figura 6.2. A resposta parte de  $c_{du}(0) = 0$  e aproxima-se do valor unitário (relativo ao degrau), conforme avança o tempo. Contudo, a resposta jamais atinge ou ultrapassa o valor 1. Ela atinge 63,2% de seu valor máximo quando  $t = T$ , pois  $c_{du}(T) = 1 - e^{-1} \cong 0,632$ . Este é o motivo pelo qual  $T$  é conhecido como constante de tempo do sistema. O sistema responde mais rapidamente quanto menor for o valor de  $T$ , uma vez que a velocidade de resposta na origem, dada pela derivada de  $c_{du}(t)$  vale

$$\left. \frac{dc_{du}(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{T}. \quad (6.8)$$

Quando  $t = 4T$ , o erro de resposta (isto é, a diferença entre a entrada e a resposta do sistema) é menor que 2%. Admite-se, para fins práticos, que se a resposta ficar confinada dentro de um erro de 2% o sistema atingiu o **regime permanente**. Ao contrário, se o sistema ainda não estabilizou o suficiente, então ele encontra-se no **regime transitório** ou **transiente**.

Não faz sentido definir o regime permanente com base em um erro nulo, uma vez que teoricamente o sistema leva um tempo infinito para atingir o valor unitário.

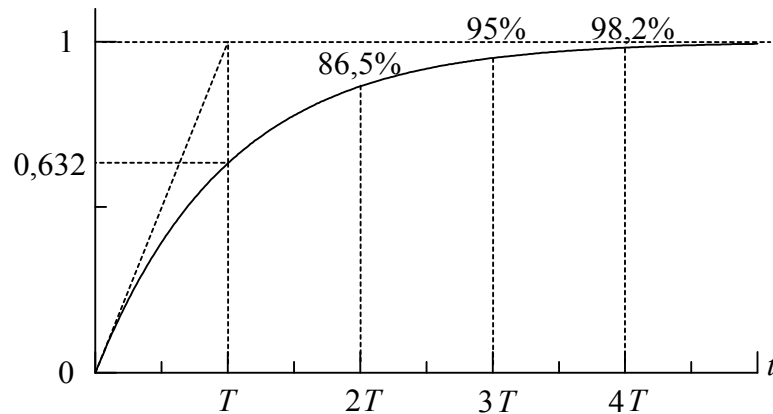


Figura 6.2 – Resposta de um sistema de primeira ordem ao degrau unitário

### 6.2.2 Resposta do sistema de primeira ordem ao impulso unitário

Se a função forçante ou a entrada do sistema for um impulso unitário  $r(t) = \delta(t)$ , então a resposta será dada por

$$C_{iu}(s) = \frac{1}{Ts + 1}, \quad (6.9)$$

cujas transformada inversa de Laplace é

$$c_{iu}(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}. \quad (6.10)$$

Nota-se que a função de entrada é nula para  $t > 0$ , e, portanto, a resposta do sistema tende para zero quando  $t$  tende para infinito, conforme visualizado na Figura 6.3.

### 6.2.3 Resposta do sistema de primeira ordem à rampa

No caso da entrada ser do tipo função rampa, ou  $r(t) = t$ , a resposta do sistema  $C_r(s)$  é dada, na transformada de Laplace, por

$$C_r(s) = \frac{1}{s^2(Ts + 1)}, \quad (6.11)$$

que resulta, quando expandido em frações parciais:

$$C_r(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T^2}{Ts + 1}. \quad (6.12)$$

A resposta no domínio do tempo fica

$$c_r(t) = t - T + T e^{-\frac{t}{T}}, \quad (6.13)$$

cujo comportamento é visto na Figura 6.4. Esta resposta, contudo, difere das anteriores pois o sistema não consegue atingir a referência quando  $t$  tende infinito. De fato, a resposta exibe um **erro de regime permanente** igual à constante de tempo  $T$ .

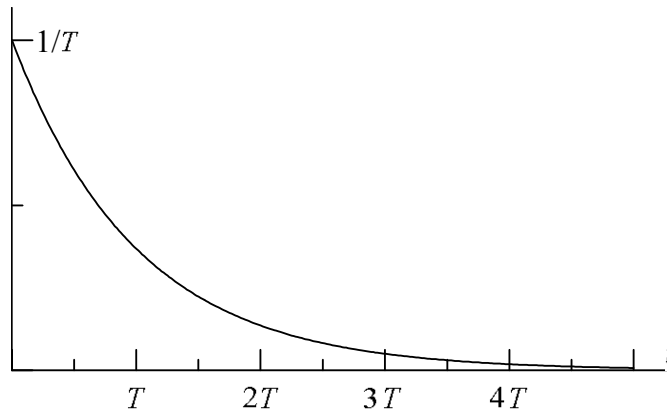


Figura 6.3 – Resposta de um sistema de primeira ordem ao impulso unitário

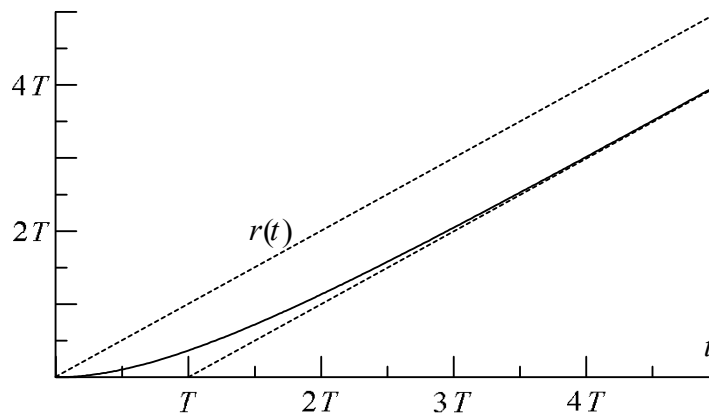


Figura 6.4 – Resposta de um sistema de primeira ordem à rampa

Nota-se que a resposta do sistema de primeira ordem à entrada rampa possui o seguinte erro de regime permanente:

$$e_{rp} = \lim_{t \rightarrow \infty} T \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) = T. \quad (6.14)$$

ou ainda

$$e_{rp} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[ \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2(Ts+1)} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{T}{Ts+1} \right] = T. \quad (6.15)$$

Há uma importante conclusão a respeito da resposta de sistemas lineares às funções mostradas aqui (degrau unitário, impulso unitário e rampa). De fato, percebe-se que a resposta do sistema ao impulso unitário é igual à derivada da resposta ao degrau, e a resposta deste é igual à derivada da resposta à rampa, ou seja:

$$c_{iu}(t) = \frac{d}{dt} c_{du}(t) = \frac{d^2}{dt^2} c_r(t) \quad (6.16)$$



Esta conclusão é válida qualquer que seja o sistema, e não apenas para sistemas de primeira ordem. Este resultado permite obter a resposta ao degrau unitário e ao impulso unitário a partir da resposta à rampa.

### 6.3 Sistemas de segunda ordem

Sistemas de segunda ordem possuem no denominador um polinômio do segundo grau na variável complexa  $s$ , na forma

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Js^2 + Bs + K} \quad (6.17)$$

Nota-se que esta função é bastante semelhante a um sistema mecânico massa-mola-amortecedor, ou um sistema elétrico indutor-capacitor-resistor, com  $J$  representando a massa, a inércia, a indutância ou a inertância;  $B$  pode ser o amortecedor, resistor ou resistência fluida;  $K$  é a constante de mola, capacitor ou capacitância fluida. Dividindo o numerador e o denominador por  $J$  e separando o polinômio nas suas raízes, tem-se

$$G(s) = \frac{K/J}{\left[ s + \frac{B}{2J} + \sqrt{\left(\frac{B}{2J}\right)^2 - \frac{K}{J}} \right] \left[ s + \frac{B}{2J} - \sqrt{\left(\frac{B}{2J}\right)^2 - \frac{K}{J}} \right]} \quad (6.18)$$

Faz-se agora uma transformação de variáveis tal que

$$\omega_n^2 = \frac{K}{J}, \quad (6.19)$$

e

$$\zeta = \frac{B}{2\sqrt{JK}}, \quad (6.20)$$

onde  $\omega_n$  (lê-se ômega-ene) é conhecida como **freqüência natural não amortecida**, e  $\zeta$  (lê-se zeta – ver Apêndice A-1) é a **razão de amortecimento**. Além disso,  $B_c = 2\sqrt{JK}$  é o **amortecimento crítico**. Substituindo estes valores em  $G(s)$  tem-se

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad (6.21)$$

ou, em termos das raízes,

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{\left[ s + \omega_n \left( \zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \right] \left[ s + \omega_n \left( \zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \right]} \quad (6.22)$$

Dependendo dos valores de  $\omega_n$  e  $\zeta$ , as raízes do polinômio (pólos da função de transferência) podem ser:

- duas raízes complexas, se  $0 < \zeta < 1$ ,
- uma raiz de multiplicidade 2 se  $\zeta = 1$ , ou
- duas raízes reais se  $\zeta > 1$ .

Uma vez que a resposta do sistema à excitação degrau unitário, rampa ou impulso unitário estão relacionadas entre si, como visto na seção anterior, será analisada a resposta do sistema de segunda ordem apenas com relação ao degrau unitário. A transformada de Laplace da resposta do sistema ao degrau unitário é dada por

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} . \quad (6.23)$$

Esta função será decomposta em frações parciais, mas uma vez que a tabela de transformadas inversas já apresenta as soluções para funções de segunda ordem, a separação em frações será feita na forma:

$$C(s) = \frac{a_1}{s} + \frac{a_2 s + a_3}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} . \quad (6.24)$$

Nota-se que o numerador é um polinômio do primeiro grau, e não apenas um termo constante. Isto é necessário, uma vez que o grau do polinômio do numerador deve ser uma unidade a menos do que o grau do denominador. A igualdade das funções permite obter os coeficientes, que resultam  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = -1$ , e  $a_3 = -2\zeta\omega_n$ , e portanto

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} . \quad (6.25)$$

Serão analisadas agora as diferentes alternativas para o valor de  $\zeta$ .

### 6.3.1 Resposta do sistema de segunda ordem para $0 < \zeta < 1$

Neste caso a resposta do sistema apresenta dois pólos complexos conjugados, e é conhecida como **movimento oscilatório sub-amortecido**. Os pólos são dados respectivamente por

$$s_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} , \quad (6.26)$$

e

$$s_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} , \quad (6.27)$$

Nota-se que a raiz é negativa, pois  $\zeta$  é menor do que a unidade. Fazendo então  $\omega_d$  ser a **frequência natural amortecida**, definida por

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} , \quad (6.28)$$

então as raízes ficam

$$\begin{aligned} s_1 &= -\zeta\omega_n + \omega_d \mathbf{j} \\ s_2 &= -\zeta\omega_n - \omega_d \mathbf{j} \end{aligned} \quad (6.29)$$

Esta alteração permite escrever a resposta do sistema na forma

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}, \quad (6.30)$$

pois

$$(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2 = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \zeta^2\omega_n^2 + \omega_n^2(1 - \zeta^2) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2. \quad (6.31)$$

Separando agora o numerador em dois termos na forma  $s + 2\zeta\omega_n = s + \zeta\omega_n + \zeta\omega_n$ , a resposta fica

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}, \quad (6.32)$$

Pode-se agora efetuar a transformada inversa de Laplace, usando a tabela de transformadas. A resposta do sistema no domínio do tempo resulta

$$c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \cos \omega_d t - \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sen \omega_d t, \quad (6.33)$$

mas como  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ , então a resposta fica

$$c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left( \cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sen \omega_d t \right). \quad (6.34)$$

A expressão acima pode igualmente ser posta na forma

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \left( \sqrt{1 - \zeta^2} \cos \omega_d t + \zeta \sen \omega_d t \right). \quad (6.35)$$

Uma vez que, por hipótese,  $0 < \zeta < 1$ , então é válido considerar que existe um ângulo  $\phi$  tal que  $\cos \phi = \zeta$ , e, neste caso,  $\sen \phi = \sqrt{1 - \cos^2 \phi} = \sqrt{1 - \zeta^2}$ . Substituindo estas expressões na resposta do sistema, tem-se

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} (\sen \phi \cos \omega_d t + \cos \phi \sen \omega_d t). \quad (6.36)$$

Lembrando finalmente que  $\sen(\alpha + \beta) = \sen \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sen \beta$ , tem-se

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sen(\omega_d t + \phi), \quad (6.37)$$

onde a relação

$$\tan \phi = \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}, \quad (6.38)$$

permite obter o ângulo  $\phi$ . A resposta também pode ser escrita como

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{sen} \left( \omega_d t + \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right), \quad (6.39)$$

válida para  $t \geq 0$ , ou seja, trata-se de uma resposta oscilatória com amplitude amortecida. O período da oscilação é  $2\pi/\omega_d$ , e o amortecimento é tanto maior quanto maior for a frequência natural não amortecida  $\omega_n$  e a constante de amortecimento  $\zeta$ . O erro da resposta com relação à entrada fica então dado por

$$e(t) = r(t) - c(t) = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{sen} \left( \omega_d t + \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right), \quad (6.40)$$

e o erro de regime permanente é nulo, pois quando o tempo  $t$  tende a infinito, o erro tende a se anular:

$$e_{rp} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0. \quad (6.41)$$

Se, porém, a constante de amortecimento for nula, isto é, se  $\zeta = 0$ , então a resposta já não é amortecida, mantendo, todavia, a oscilação, com período  $2\pi/\omega_n$ . Logo, para  $\zeta = 0$  a resposta vale

$$c(t) = 1 - \cos \omega_n t. \quad (6.42)$$

Com base na resposta amortecida e não amortecida fica mais fácil entender a razão dos nomes de  $\omega_n$  e  $\omega_d$ . Nota-se que a frequência natural amortecida,  $\omega_d$ , é sempre menor do que a frequência natural não amortecida,  $\omega_n$ . Contudo, conforme a constante de amortecimento aproxima-se de 1, a resposta torna-se não oscilatória e mais amortecida, como visto a seguir.

### 6.3.2 Resposta do sistema de segunda ordem para $\zeta = 1$

Quando  $\zeta = 1$  o sistema torna-se **criticamente amortecido**, ou de **amortecimento crítico**. Substituindo este valor da constante de amortecimento na função de transferência, resulta que

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2}, \quad (6.43)$$

cujas resposta ao degrau unitário no domínio da variável complexa é:

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + \omega_n)^2}. \quad (6.44)$$

Decompondo a expressão acima em frações parciais, tem-se

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \omega_n} - \frac{\omega_n}{(s + \omega_n)^2}. \quad (6.45)$$

Recorrendo à tabela de transformada de Laplace ( $a$  e  $g$ ), pode-se efetuar agora a transformada inversa

$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t} = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t), \quad (6.46)$$

que apresenta um erro de regime permanente dado por

$$e_{rp} = \lim_{t \rightarrow \infty} [r(t) - c(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t) = 0, \quad (6.47)$$

ou seja, o erro em regime permanente é nulo. Deve-se notar também a ausência de oscilação na resposta do sistema, que é puramente uma exponencial assintótica (amortecida).

### 6.3.3 Resposta do sistema de segunda ordem para $\zeta > 1$

Quando a constante de amortecimento é maior do que 1, tem-se um sistema **sobre-amortecido** ou **superamortecido**. A função de transferência apresenta agora dois pólos reais e distintos,  $s_1$  e  $s_2$ , dados por

$$s_1 = \omega_n \left( -\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right), \text{ e } s_2 = \omega_n \left( -\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right). \quad (6.48)$$

A resposta do sistema à ação degrau unitário fica dada por

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s \left( s + \zeta \omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \left( s + \zeta \omega_n + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \right)} \quad (6.49)$$

Separando em frações parciais e aplicando a transformada inversa, a resposta no tempo fica

$$c(t) = 1 + \frac{e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})} - \frac{e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})}, \quad (6.50)$$

composta por duas exponenciais, com decaimentos diferentes, uma vez que os expoentes são distintos. Esta expressão pode ser escrita na forma mais compacta

$$c(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left[ \frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2} \right]. \quad (6.51)$$

Percebe-se, igualmente, que o erro em regime permanente é nulo, pois se trata de uma soma de duas exponenciais decrescentes, uma vez que tanto  $s_1$  quanto  $s_2$  são positivos:

$$e_{rp} = \lim_{t \rightarrow \infty} [r(t) - c(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left[ \frac{e^{-s_2 t}}{s_2} - \frac{e^{-s_1 t}}{s_1} \right] = 0. \quad (6.52)$$

A Figura 6.5 ilustra o comportamento de um sistema de segunda ordem em função da constante de amortecimento  $\zeta$  e do ângulo  $\omega_n t$ , para excitação na forma de um degrau unitário. Pode ser mostrado que se a constante de amortecimento estiver limitada entre os extremos  $\sqrt{2}/2 < \zeta < 1$ , (movimento oscilatório sub-amortecido), então a resposta apresentará um único pico, isto é, ela ultrapassa o valor 1 apenas uma vez, e depois aproxima-se de 1 sem entretanto cair abaixo deste valor (ver a curva referente a  $\zeta = 0,75$  na Figura 6.5). Nota-se também que todas as curvas apresentam erro de regime permanente nulo (tendem para 1) exceto a resposta para uma constante de amortecimento nula, que é oscilatória.

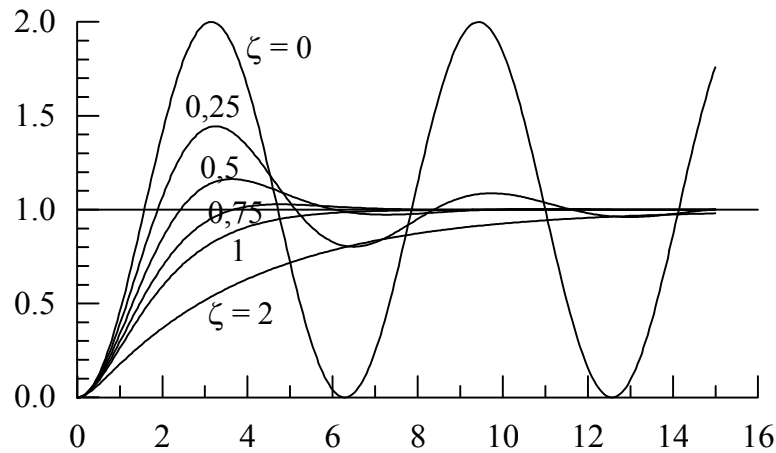


Figura 6.5 – Resposta de um sistema de segunda ordem ao degrau unitário, para diferentes valores da constante de amortecimento  $\zeta$ .

#### 6.4 Análise de desempenho com base na resposta transiente

Em geral a análise do desempenho ou das características de um sistema é realizada com base na resposta deste sistema a uma excitação qualquer. Como o degrau unitário permite diferenciar bem o comportamento dinâmico dos diversos sistemas, ele é normalmente escolhido como a excitação de referência, embora o impulso unitário possa igualmente desempenhar este papel. Como visto, a resposta de um sistema de ordem maior ou igual a 2 não atinge a referência imediatamente, mas apresenta um transiente amortecido até atingir o regime estacionário (ou permanente). O comportamento do sistema no transitório depende, é claro, das condições iniciais. Contudo, para simplificar a análise, é comum adotar-se condições iniciais nulas. Assim, a resposta destes sistemas possui o comportamento típico mostrado na Figura 6.6, com uma ou outra alteração. Com base neste comportamento, pode-se definir algumas variáveis com base na resposta ao degrau unitário. As mais importantes são:

- tempo de atraso de resposta,  $t_d$
- tempo de subida,  $t_r$
- instante de pico ou de máxima resposta,  $t_p$
- máximo sobre-sinal,  $M_p$
- tempo de assentamento,  $t_s$

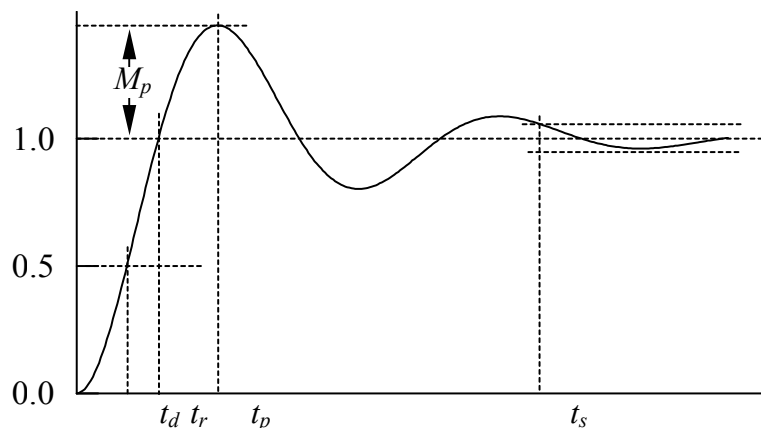


Figura 6.6 – Caracterização da resposta de um sistema dinâmico

O **tempo de atraso de resposta**,  $t_d$ , é o intervalo no qual o sistema atinge pela primeira vez 50% do seu valor final (estacionário). O **tempo de subida**,  $t_r$ , é o tempo que o sistema

leva para passar de 0 a 100% do seu valor final, ou então de 5% a 95%, ou ainda de 10% a 90%. Na Figura 6.6 o tempo de subida está representado no intervalo 0 a 100%. O **tempo de pico** ou **instante de pico** ou **instante de máxima resposta**,  $t_p$ , é o intervalo de tempo necessário até que o sistema atinja seu primeiro **sobre-sinal** (ou *overshoot*). O **sobre-sinal máximo**,  $M_p$ , é a diferença entre a resposta no instante de pico e o valor da resposta em regime permanente. Pode ser mostrado que o sobre-sinal máximo relaciona-se com a estabilidade do sistema. O **tempo de assentamento**,  $t_s$ , é o intervalo que o sistema leva até que a resposta caia dentro de uma faixa de valores centrada no valor final do regime permanente. Esta faixa é geralmente escolhida entre 2% a 5%, dependendo dos objetivos do projeto. O tempo de assentamento é maior do que todos os outros intervalos definidos aqui. Admite-se, para fins práticos, que após o tempo de assentamento o sistema tenha atingido o regime permanente. Em sistemas sobre-amortecidos o instante de pico e o sobre-sinal máximo não são definidos.

**Exemplo 6.1** – Classificar o sistema dado pela função de transferência abaixo quanto à forma de amortecimento, para uma excitação degrau. Apresentar um gráfico em função do tempo.

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s+5}{s^2+2s+2}$$

Solução:

Os pólos da função de transferência são dados por

$$s = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm j$$

ou seja, tem-se dois pólos complexos conjugados e o sistema é, portanto, oscilatório sub-amortecido.

Se  $R(s)$  for uma excitação degrau, então a resposta do sistema fica:

$$C(s) = \frac{1}{s} \frac{s+6}{s^2+2s+2},$$

que pode ser decomposta em frações parciais, resultando

$$C(s) = \frac{3}{s} - \frac{3s+5}{s^2+2s+2}.$$

Pode-se agora obter a frequência natural não amortecida e a constante de amortecimento, dados respectivamente por:

$$\omega_n = \sqrt{2},$$

$$\zeta = \sqrt{2}/2.$$

Por sua vez, a frequência natural amortecida vale

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} = 1,$$

e a resposta, posta em função desta frequência, resulta

$$C(s) = \frac{3}{s} - \frac{3s+5}{(s+1)^2+1} = \frac{3}{s} - 3 \frac{s+1}{(s+1)^2+1} - 3 \frac{2/3}{(s+1)^2+1}.$$

Recorrendo agora à tabela de transformadas de Laplace, a resposta em função do tempo fica

$$c(t) = 3 - 3e^{-t} \cos t - 2e^{-t} \sin t,$$

cujo gráfico é apresentado na Figura 6.7

O valor final é igual à resposta em regime permanente, ou seja:

$$c_{rp} = \lim_{t \rightarrow \infty} (3 - 3e^{-t} \cos t - 2e^{-t} \sin t) = 3.$$

O tempo de resposta é então calculado por:

$$c(t_d) = 3 - 3 \exp(-t_d) \cos t_d - 2 \exp(-t_d) \sin(t_d),$$

que, por definição, deve ser igual a 50% do valor final, ou seja, 1,5. Contudo a função  $c(t)$  não admite inversa, e assim o valor do tempo de resposta pode ser somente obtido por meios gráficos ou então por métodos numéricos de busca de raízes, resultando  $t_d = 0,8439$  s.

De forma análoga calcula-se o tempo de subida de 0 a 100% do valor final,  $t_s = 2,1587$  s, o instante de pico  $t_p = 2,9442$  s (calculado por meio da raiz da derivada), e o sobre-sinal máximo  $M_p = c(t_p) - 3 = 0,1342$ . Finalmente, o tempo de assentamento para 2% é  $t_s = 4,045$  s. Para o cálculo deste último é necessário construir um algoritmo que verifique o instante em que a resposta fica totalmente confinada no intervalo entre 2,94 e 3,06.

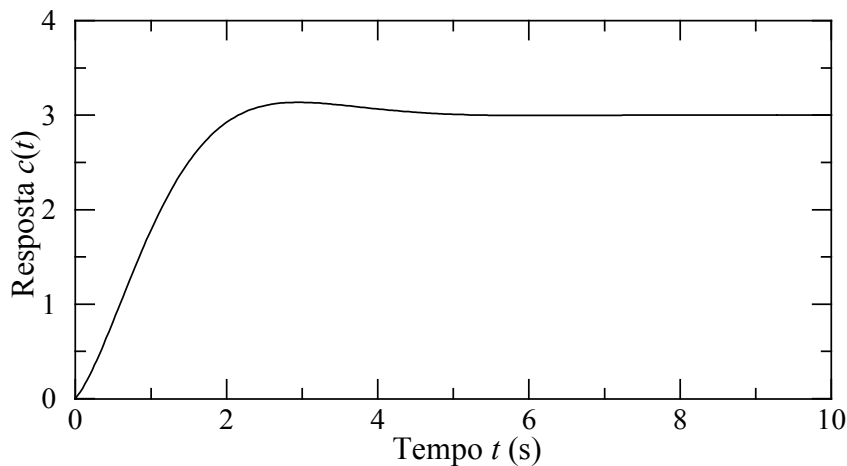


Figura 6.7 – Resposta no domínio do tempo do exemplo 6.1



## 7 CONTROLE CLÁSSICO DE SISTEMAS

O controle de sistemas visa obrigar uma determinada planta a possuir um comportamento ditado por regras pré-estabelecidas, mediante ações deliberadas sob a coordenação do controlador. De pilotos automáticos de aeronaves, passando por injetores eletrônicos de combustível em motores, até mesmo nos eletrodomésticos e satélites artificiais, o mundo conhece hoje milhares de usos para o controle de sistemas. Há, contudo, inúmeras formas de se efetuar este controle, e muitas delas fogem ao propósito adotado aqui, como, por exemplo, controle por lógica nebulosa, controle por redes neurais, controle estocástico, controle não linear, só para mencionar algumas. Neste capítulo será apresentado o conceito clássico de controle, baseado na realimentação de sinais, em malha fechada.

### 7.1 Definições

Um controlador de um sistema é um dispositivo eletrônico, pneumático, hidráulico ou mecânico que compara a situação atual da planta (o estado da planta, dado pela sua posição, velocidade, tensão, etc.) que se quer controlar, determina a seguir o desvio ou erro com relação a uma referência fornecida e produz um sinal de controle no atuador que, por sua vez, leva o sistema a reduzir ou anular este erro. A Figura 7.1 mostra um esquema simplificado de um controlador. Num sistema controlado pode haver um conjunto de **atuadores** que transformam o sinal do controlador numa ação exercida na planta, e um conjunto de **sensores**, que medem o estado da planta e condicionam esta medida para o controlador. Percebe-se na Figura 7.1 que o controlador define uma **malha fechada**, isto é, ele avalia a atuação para modificar o estado da planta a partir do estado dela. Embora os controladores em malha fechada sejam mais comuns, existem casos de controladores em **malha aberta**, que não necessitam conhecer o estado da planta.

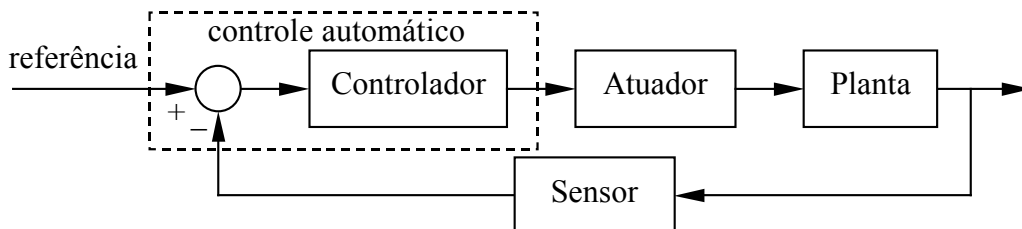


Figura 7.1 – Esquema simplificado do controle de uma planta

A teoria envolvendo a forma como o controlador transforma o erro (ou então as informações do estado e da referência num sinal de controle é bastante vasta e são inúmeros os tipos de controladores diferentes ( $H_\infty$ , robusto, não linear, adaptativo, escalonado, fuzzy ou lógica nebulosa, neural, etc.). Porém, os principais tipos de controle utilizados na indústria, e que se adaptam facilmente a sistemas lineares são:

- a) Controladores on-off, de duas posições, ou bang-bang
- b) Controladores proporcionais (P)
- c) Controladores integrais (I)
- d) Controladores proporcionais-integrais (PI)
- e) Controladores proporcionais-derivativos (PD)
- f) Controladores proporcionais-integrais-derivativos (PID)

A função do atuador é transformar o sinal do controlador, de baixa potência, num sinal ou força de alta potência, suficiente para modificar o estado da planta. Os sensores ou elementos de medida transformam a saída da planta (estado) que pode ser posição, pressão, voltagem,

etc., em outro tipo de sinal que seja compatível com a forma utilizada pelo controle. Em geral os sistemas de controle necessitam de um suprimento externo de energia para poderem operar. Nos controle auto-operados não há essa necessidade.

## 7.2 Controladores auto-operados

Nos controladores auto-operados a energia necessária para a operação é retirada do próprio elemento controlado. Nem sempre é possível se projetar um controlador auto-operado para um sistema qualquer. Um exemplo deste tipo de controlador é um regulador de pressão, mostrado na Figura 7.2. Neste tipo de regulador, uma válvula acionada por um diafragma ajusta a pressão de saída com base na pressão de referência e no ajuste de operação. Quando a pressão na saída cai abaixo do valor de operação, o diafragma desce forçando a abertura da válvula. Quando a pressão de saída aumenta a válvula é obrigada a fechar. Este tipo de regulador é encontrado em máquinas pneumáticas e hidráulicas, em sistemas de controle de pressão da água em edifícios e nos “scubas” (tanques de mergulho), e também nos reguladores de botijões de gás GLP (gás liquefeito de petróleo) domésticos.

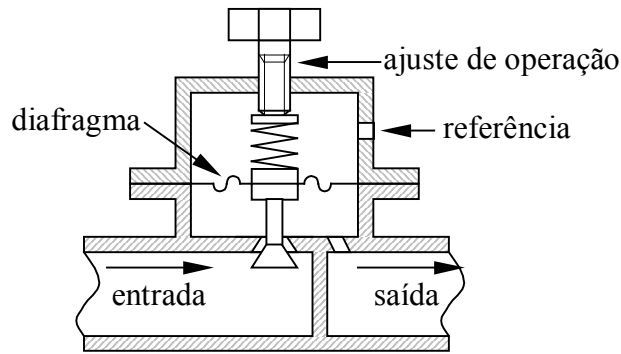


Figura 7.2 – Um regulador automático de pressão auto-operado.

## 7.3 Controle on-off

Num sistema de controle liga-desliga o elemento de atuação pode assumir apenas dois estados, ou duas posições; em geral ligado e desligado. Uma variação do controle liga-desliga é o controle bang-bang, no qual há uma terceira possibilidade: ligado, desligado ou invertido. Nos controladores liga-desliga a atuação é obtida em função do sinal do erro, por exemplo:

$$u(t) = \begin{cases} u_1, & \text{para } e(t) > 0 \\ u_2, & \text{para } e(t) \leq 0 \end{cases} \quad (7.1)$$

cujo gráfico é mostrado na Figura 7.3 (a) ou ainda

$$u(t) = \begin{cases} U, & \text{para } e(t) > 0 \\ 0, & \text{para } e(t) = 0 \\ -U, & \text{para } e(t) < 0 \end{cases} \quad (7.2)$$

Exemplos destes controladores são válvulas pneumáticas operadas por solenóides elétricos, válvulas hidráulicas, chaves elétricas, etc. Considere, por exemplo, um sistema de controle de nível como indicado na Figura 7.4. Quando o nível do tanque é baixo a bóia provoca o fechamento do interruptor elétrico, causando a abertura da válvula operada pelo solenóide, e liberando assim a entrada de líquido. Se o fornecimento de água (vazão de entrada) for maior do que a retirada (vazão de saída), então a altura de líquido no tanque irá

subir. Quando for atingido o nível de operação, a bóia sobe e abre a chave, o que fecha o fornecimento de água. Um problema bastante comum em controladores do tipo liga-desliga é o rápido chaveamento que ocorre quando o erro está próximo de zero, ou seja, quando o sistema está operando perto do ponto de operação. Nesta situação, pequenos deslocamentos fazem com que o atuador (válvula) ligue e desligue em intervalos curtos de tempo, o que provoca um desgaste rápido do atuador. Para evitar este chaveamento rápido, introduz-se uma **zona morta** ou uma **lacuna diferencial** no ponto de operação, fazendo com que o controle fique desligado sempre que o estado estiver próximo (e não apenas igual) do ponto de operação. O controle passa a ser dado então por:

$$u(t) = \begin{cases} u_1, & \text{para } e(t) > \varepsilon_1 \\ u_2, & \text{para } e(t) < \varepsilon_2 \end{cases} \quad (7.3)$$

onde  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  são constantes escolhidas com base na frequência desejada de chaveamento. Em geral  $\varepsilon_1$  é positivo e  $\varepsilon_2$  é negativo. Nota-se que o controle não é definido na região interna, entre os valores de  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$ . Na verdade, dentro da zona morta o controle mantém-se com o mesmo estado que estava anteriormente, e, portanto, ele pode tanto estar no nível de  $u_1$  quanto de  $u_2$ . Como indica a Figura 7.3 (b), dentro da zona morta o controle descreve a trajetória indicada pelas setas, o que lembra uma curva de histerese magnética. As representações em diagrama de blocos de controladores liga-desliga sem e com zona morta são mostradas na Figura 7.5 (a) e (b), respectivamente.

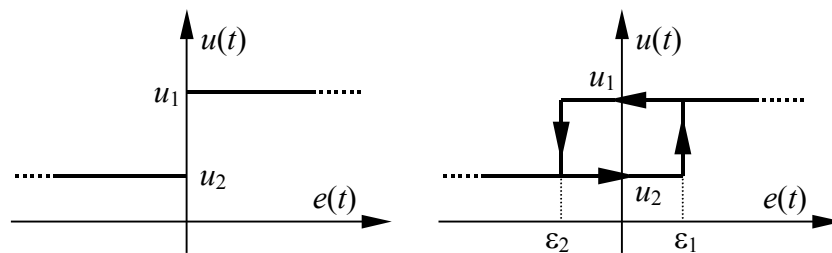


Figura 7.3 – Controle liga-desliga (a) e liga-desliga com zona morta (b).

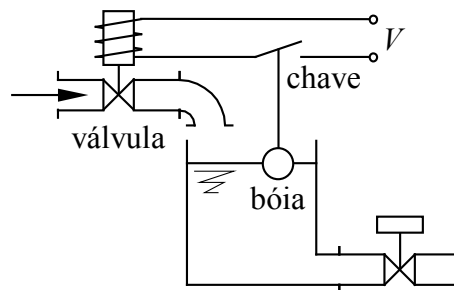


Figura 7.4 – Controle de nível num tanque do tipo liga-desliga.

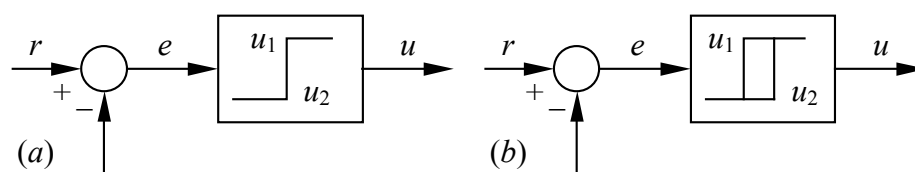


Figura 7.5 – Diagrama de blocos de um controlador do tipo liga-desliga (a), e liga-desliga com zona morta (b).

Num sistema com controlador liga-desliga com zona morta, a resposta fica oscilando entre os valores mínimo e máximo da zona morta, e entre os extremos o sistema segue a sua própria dinâmica, uma vez que não há atuação dentro da zona morta. A Figura 7.6 mostra o comportamento típico de um sistema sujeito a um controle liga-desliga com zona morta. No exemplo do controlador de nível, se  $h_o$  for a altura a ser controlada, o controle com zona morta seria na forma: ligar se  $h < h_o - \varepsilon$ , e desligar se  $h > h_o + \varepsilon$ . Nota-se também que, devido ao fato do controle liga-desliga ser não linear, não há como obter uma solução fechada do problema, ou seja, não existe uma função  $f(t)$  que descreva o comportamento do sistema no tempo, já que ele é descontínuo. Por isso recorre-se freqüentemente a simulações numéricas para analisar este tipo de controle.

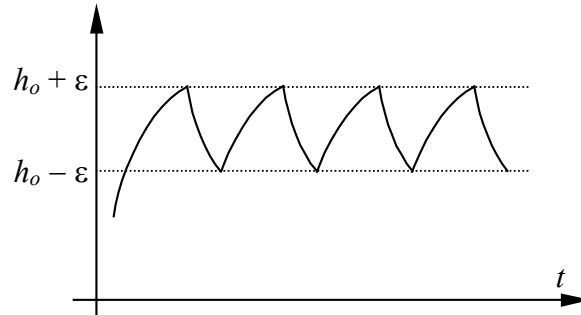


Figura 7.6 – Comportamento dinâmico de um sistema com controlador liga-desliga com zona-morta.

#### 7.4 Controladores proporcionais (P)

Num controlador com ação proporcional de controle, a atuação é proporcional ao sinal do erro  $e(t)$ , ou seja, quanto maior o erro, maior será a atuação. Se o sinal do controle for representado por  $u(t)$ , então num controle proporcional tem-se:

$$u(t) = K_p e(t) \tag{7.4}$$

ou, aplicando a transformada de Laplace:

$$U(s) = K_p E(s), \tag{7.5}$$

onde  $K_p$  é uma constante conhecida como **ganho proporcional**. A Figura 7.7 representa o diagrama de bloco de um controlador proporcional. Um sistema controlado por um controlador proporcional e cuja função de transferência é dada por  $G(s)$  possui um diagrama de blocos semelhante ao mostrado na Figura 7.8. A função resultante do sistema controlado fica então

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p G(s)}{1 + K_p G(s)}. \tag{7.6}$$

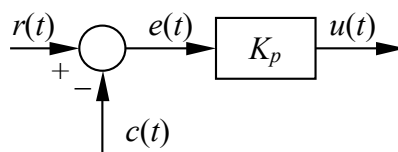


Figura 7.7 – Diagrama de blocos de um controle proporcional

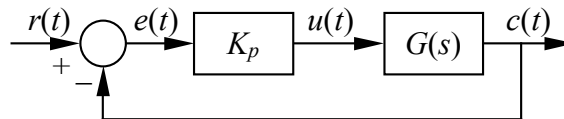


Figura 7.8 – Diagrama de blocos de um sistema com controle proporcional

Antes de analisar os demais tipos de controladores, é conveniente investigar o comportamento dos sistemas sujeitos ao controle proporcional. No capítulo 6 foram vistos os comportamentos de sistemas dinâmicos com base nas funções de transferência. Uma vez que um sistema controlado possui também uma função de transferência, a análise realizada anteriormente pode ser aplicada aqui. Esta análise é apresentada nos exemplos a seguir, para o controle proporcional.

**Exemplo 7.1** – Considera-se uma massa deslizando sobre uma superfície, com coeficiente de atrito  $b$ , como indicado na Figura 7.9. Dispõe-se de um atuador capaz de aplicar uma força variável  $f(t)$  na massa  $m$ . Deseja-se controlar a posição desta massa de forma a mantê-la próximo da origem, em  $x = 0$ , usando para isso um controlador proporcional agindo na força  $f$ . Qual é o erro em regime permanente da planta considerando-se um sinal de referência do tipo degrau unitário?

Solução:

O equilíbrio de forças agindo sobre a massa impõe que

$$m \ddot{x} = f(t) - b \dot{x},$$

e assim a função de transferência do sistema mecânico, composta pela massa  $m$  e pelo atrito (amortecedor)  $b$  fica:

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{m s^2 + b s}.$$

A função de transferência em malha fechada do controlador proporcional é então dada por:

$$\frac{X(s)}{R(s)} = \frac{K_p}{m s^2 + b s + K_p},$$

obtida a partir do diagrama de blocos do sistema mostrado na Figura 7.10. Uma vez que o erro no posicionamento da massa é calculado por  $e(t) = r(t) - x(t)$ , então efetuando-se a transformada de Laplace do erro e dividindo-se por  $R(s)$  chega-se a

$$\frac{E(s)}{R(s)} = 1 - \frac{X(s)}{R(s)} = \frac{m s^2 + b s}{m s^2 + b s + K_p},$$

mas como a referência  $R(s)$  é um degrau unitário, o erro fica

$$E(s) = \frac{m s^2 + b s}{s(m s^2 + b s + K_p)},$$

de onde se segue que o erro em regime permanente é dado pelo teorema do valor final, ou seja

$$e_{rp} = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{m s^2 + b s}{m s^2 + b s + K_p} = 0,$$

ou seja, o erro é nulo no regime permanente. Isto significa que o controlador está efetivamente controlando a posição da massa, desde que a referência seja do tipo degrau (unitário ou não). Infelizmente esta análise não é válida para outros tipos de sinal de referência, e cada caso deve ser analisado separadamente.

Nota-se que este sistema é de segunda ordem, com constante de amortecimento não nula, e portanto apresenta uma resposta com oscilação amortecida (ver seção 6.3.2). O amortecimento pode ser sub-amortecido ou sobre-amortecido, conforme ilustra a Figura 7.11, dependendo das constantes físicas  $m$ ,  $b$  e do valor do ganho proporcional  $K_p$ .

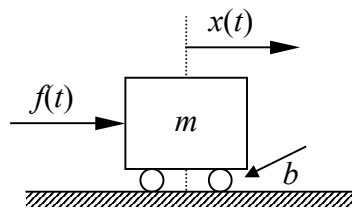


Figura 7.9 – Sistema com deslocamento controlado pela força  $f(t)$ .

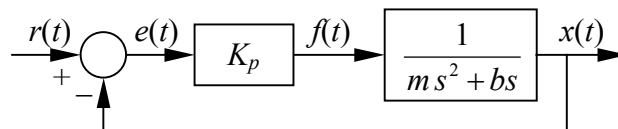


Figura 7.10 – Diagrama de blocos do controlador proporcional do exemplo 7.1.

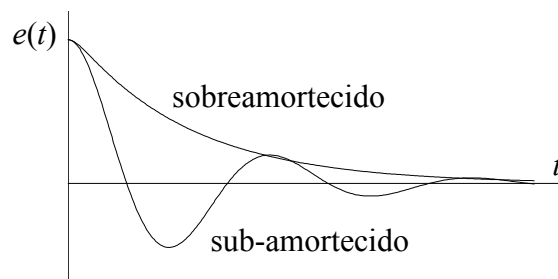


Figura 7.11 – Comportamento dinâmico do sistema do exemplo 7.1.

**Exemplo 7.2** – Considera-se agora que a massa do exemplo anterior desliza sem atrito sobre a superfície. Qual é o comportamento da massa em regime permanente com base na análise dos pólos da função de transferência do sistema?

Solução:

Novamente parte-se da função de transferência da planta, composta unicamente pela massa  $m$ , já que a entrada é a força e a saída é o deslocamento  $x$ :

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{m s^2},$$

que apresenta dois pólos reais e iguais a zero. O diagrama de blocos deste sistema junto com o controlador é apresentado na Figura 7.12, cuja função de transferência completa é:

$$\frac{X(s)}{R(s)} = \frac{K_p}{m s^2 + K_p}.$$

Esta relação apresenta dois pólos complexos conjugados com parte real nula:  $s_1 = \sqrt{K_p/m} \mathbf{j}$  e  $s_2 = -\sqrt{K_p/m} \mathbf{j}$ . Sabe-se, neste caso (ver seção 6.3.2, com constante de amortecimento nula), que a resposta do sistema é oscilatória (caso a posição inicial seja não nula), e portanto o sistema nunca atinge o equilíbrio e nunca fica estacionado na origem, como mostra a Figura 7.13. Uma vez que se deseja manter a massa na origem, então este controlador não é eficiente para cumprir este objetivo.

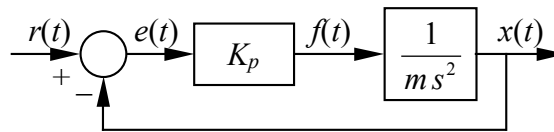


Figura 7.12 – Diagrama de blocos do controlador proporcional do exemplo 7.2.

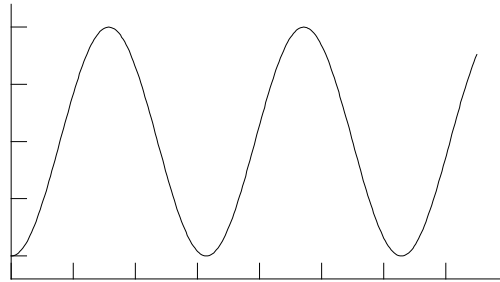


Figura 7.13 – Comportamento dinâmico do sistema do exemplo 7.2.

Conclui-se, com base nos dois exemplos anteriores, que o controle exclusivamente proporcional é recomendável somente quando o sistema é amortecido naturalmente (possui constante de amortecimento não nula). Sistemas não amortecidos irão oscilar indefinidamente sob a ação de um controle exclusivamente proporcional. Neste caso deve-se empregar o controle derivativo, visto a seguir.

### 7.5 Controlador proporcional-derivativo (PD)

A ação do controle derivativo é proporcional à variação do erro, isto é, quanto maior for a taxa de variação do erro, ou a velocidade com que o erro varia, maior será a ação derivativa. O controle PD agrupa o controle proporcional, adicionado ao controle derivativo, na forma:

$$u(t) = K_p e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt}. \quad (7.7)$$

O **ganho derivativo**,  $K_d$ , pode ser posto em função do ganho proporcional e do **tempo derivativo**,  $T_d = K_d / K_p$ . A transformada de Laplace do controlador PD é dada por

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p (1 + T_d s), \quad (7.8)$$

O diagrama de blocos mostrado na Figura 7.14 representa um controlador PD de uma planta com função de transferência dada por  $G(s)$ . A função de transferência do sistema completo é

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p(1+T_d s) G(s)}{1+K_p(1+T_d s) G(s)} \quad (7.9)$$

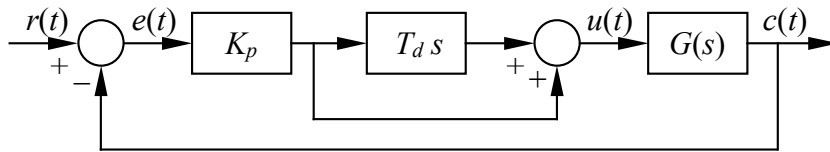


Figura 7.14 – Diagrama de blocos de um sistema com controle proporcional-derivativo.

**Exemplo 7.3** – Analisar o erro em regime permanente do sistema do exemplo 7.1, sem atrito, com um controlador PD (proporcional-derivativo), sujeito a um degrau unitário na entrada  $r(t)$ .

Solução:

A Figura 7.15 apresenta o diagrama de blocos deste exemplo, cuja função de transferência em malha fechada é dada por:

$$\frac{X(s)}{R(s)} = \frac{K_p(1+T_d s)}{m s^2 + K_p T_d s + K_p}$$

onde  $K_p$  é o ganho proporcional e  $T_d$  é o tempo derivativo. O erro no posicionamento da massa pode ser novamente calculado, resultando

$$\frac{E(s)}{R(s)} = 1 - \frac{X(s)}{R(s)} = \frac{m s^2}{m s^2 + K_p T_d s + K_p}$$

Quando a entrada é um degrau unitário, o erro em regime permanente fica

$$e_{rp} = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{m s^2}{m s^2 + K_p T_d s + K_p} \frac{1}{s} = 0,$$

e novamente o erro no regime permanente é nulo, ou seja, o controle é estável e leva o sistema à posição de equilíbrio  $x = 0$ . A análise dos pólos permite concluir que o comportamento dinâmico do controle será amortecido. Ajustando o valor de  $T_d$  e  $K_d$ , pode-se obter um comportamento sub-amortecido ou sobre-amortecido.

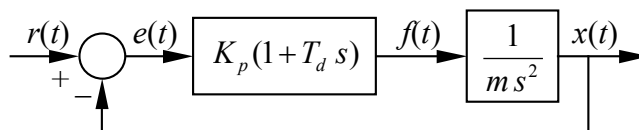


Figura 7.15 – Diagrama de blocos do controlador PD do exemplo 7.3.



O sistema resultante de uma inércia pura (massa) com um controlador PD é semelhante a um sistema de segunda ordem com constante de amortecimento não nula, portanto é equivalente a um sistema naturalmente amortecido com controlador P. O controle derivativo portanto introduz um amortecimento no comportamento dinâmico do sistema.

É comum encontrar-se sistemas que sofrem perturbações na dinâmica. Estas perturbações podem ser estáticas, dinâmicas ou aleatórias. Uma perturbação estática exerce uma ação constante, enquanto que a perturbação dinâmica varia no tempo de forma previsível. Por sua vez, uma perturbação aleatória é imprevisível e assemelha-se a um ruído agindo sobre o sistema. O exemplo a seguir ilustra o comportamento do controlador quando houver uma perturbação agindo no sistema.

**Exemplo 7.4** – Será suposto agora que a massa do exemplo 7.1 esteja submetida à ação de uma força perturbadora de intensidade  $d(t)$  na forma de um degrau unitário, e o controlador é apenas proporcional. Há atrito entre a massa e a superfície. Analisar o erro do sistema com relação à força perturbadora (considerar como sendo do tipo degrau unitário).

Solução:

Este problema pode ser visto como o controle de uma massa numa rampa inclinada, conforme ilustra a Figura 7.16. O peso, projetado na direção do movimento, causa a força  $d(t)$ . No instante  $t = 0$ , a massa, anteriormente presa, é deixada sob a ação do controle e do peso. O controle deverá então compensar a ação do peso e restaurar a posição inicial da massa. A referência,  $r(t)$ , neste caso é nula. O equilíbrio de forças na massa leva a

$$d(t) + f(t) = m\ddot{x} + b\dot{x}$$

Aplicando a transformada de Laplace a esta equação, e lembrando que a transformada de  $d(t)$  é  $D(s)$ , tem-se

$$D(s) + F(s) = m s^2 X(s) + b s X(s)$$

O diagrama de blocos deste problema é mostrado na Figura 7.17, e dele pode-se extrair a saída  $X(s)$  em função do erro:

$$X(s) = \frac{E(s) K_p + D(s)}{m s^2 + b s}$$

Nota-se que, devido à presença da perturbação  $d(t)$ , não se pode aplicar a formulação discutida na seção 5.1 para obter a função de transferência em malha fechada. Ao contrário, deve-se aplicar as definições para composição de diagramas de blocos.

Uma vez que  $E(s) = R(s) - X(s)$ , e como  $R(s) = 0$ , então isolando  $X(s)$  e substituindo estes valores na função de transferência tem-se

$$-E(s) = \frac{E(s) K_p}{m s^2 + b s} + \frac{D(s)}{m s^2 + b s}$$

que reordenando os termos fica

$$\frac{E(s)}{D(s)} = -\frac{1}{m s^2 + b s + K_p}$$

Finalmente, sabendo-se que  $D(s)$  é um degrau unitário, o erro em regime permanente será dado por

$$e_{rp} = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{-1}{ms^2 + bs + K_p} \frac{1}{s} = -\frac{1}{K_p}.$$

Isto significa que, embora a referência para o controle seja nula ( $R(s) = 0$ ), o controle proporcional não consegue anular o erro em regime permanente. O erro pode ser diminuído pelo aumento do valor de  $K_p$ , mas isto faz com que aumentem também as oscilações no regime transitório.

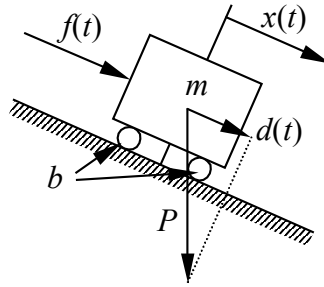


Figura 7.16 – Controle da posição de uma massa numa rampa inclinada com atrito.

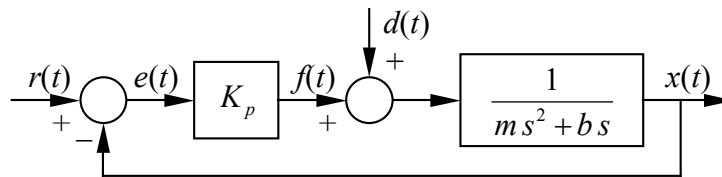


Figura 7.17– Diagrama de blocos do controlador proporcional do exemplo 7.4.

Conclui-se, com base no último exemplo, que um controlador proporcional num sistema naturalmente amortecido, ou um controlador PD num sistema qualquer, e sujeito à ação de forças perturbadoras, não consegue anular o erro em regime permanente.

Ademais, se a força  $d(t)$  for um degrau de intensidade  $d_o$ , então o erro em regime permanente do exemplo anterior resulta igual a

$$e_{rp} = -\frac{d_o}{K_p} \tag{7.10}$$

e a massa estará na posição  $x_{rp} = -e_{rp} = -d_o/K_p$ . Logo, quanto maior for a força perturbadora, maior será o erro na posição da massa.

Em resumo, controladores P ou PD podem não eliminar o erro apresentado pelo sistema com relação à referência quando os sistemas são perturbados. Para eliminar este erro será necessário introduzir o controlador integral, visto na próxima seção.

## 7.6 Controladores integrais (I)

A ação de um controlador integral muda de forma proporcional ao sinal de erro, ou seja

$$\frac{du(t)}{dt} = K_i e(t) \tag{7.11}$$

cuja transformada de Laplace vale:

$$s U(s) = K_i E(s), \quad (7.12)$$

onde  $K_i$  é também constante, conhecido como **ganho integral**. Em termos de diagrama de blocos, o controlador integral, num sistema com função de transferência  $G(s)$ , fica como mostrado na Figura 7.18. A função de transferência do sistema controlado fica:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_i G(s)}{s + K_i G(s)}. \quad (7.13)$$

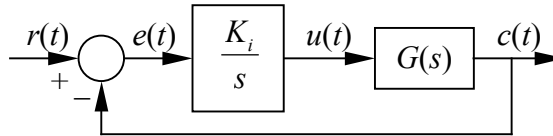


Figura 7.18 – Diagrama de blocos de um sistema com controle integral.

**Exemplo 7.5** – Considerar um veículo movendo-se num plano com velocidade  $v$ , como ilustra a Figura 7.19. A velocidade deve ser controlada por uma força  $u(t)$  proporcional à integral do erro na velocidade. Analisar o comportamento do erro em regime permanente considerando uma referência na forma de um degrau unitário.

Solução:

A função de transferência do veículo submetido a uma entrada na forma de uma força  $u(t)$ , é dada por:

$$\frac{V(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms + b},$$

e, como a força é proporcional à integral da velocidade, então a função de transferência do sistema, conforme mostra a Figura 7.20, será dada por:

$$\frac{V(s)}{R(s)} = \frac{K_i}{ms^2 + bs + K_i}$$

Pode-se agora obter a função de transferência do erro, com relação ao sinal de referência, que resulta:

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{R(s) - V(s)}{R(s)} = \frac{ms^2 + bs}{ms^2 + bs + K_i}$$

e como a referência  $r(t)$  é um degrau unitário, então usa-se o teorema do valor final para estimar o erro em regime permanente, ou seja:

$$e_{rp} = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(ms^2 + bs)}{s(ms^2 + bs + K_i)} = 0,$$

de onde se conclui que o controle integral consegue eliminar o erro apresentado na velocidade do veículo.

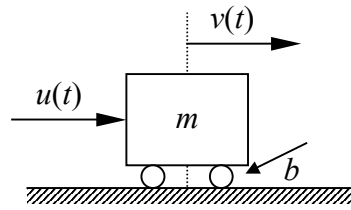


Figura 7.19 – Veículo movendo-se com velocidade  $v$  num plano.

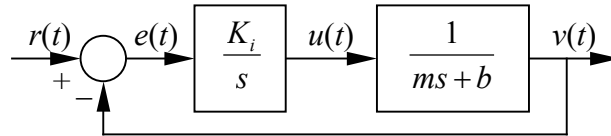


Figura 7.20 – Diagrama de blocos de um sistema com controle integral.

Embora o controle integral seja amplamente utilizado, ele raramente é empregado isoladamente. O principal motivo disso é que a sua ação tende a ser lenta, o que leva a tempos de resposta e assentamento muito longos (ver Seção 6.4), além de causar transitórios sub-amortecidos. Sistemas naturalmente amortecidos podem ser controlados com um controle do tipo PI, visto a seguir.

### 7.7 Controlador proporcional-integral (PI)

Pode-se agrupar o controle proporcional junto com o integral em um único controlador. Este controle é denominado de proporcional-integral (PI) e a atuação é a soma das atuações proporcional e integral, ou seja

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int e(t) dt . \quad (7.14)$$

É conveniente expressar o ganho integral  $K_i$  em termos do **tempo integral**,  $T_i$ , dado pela relação entre  $K_p$  e  $K_i$ . Neste caso o controle fica

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int e(t) dt . \quad (7.15)$$

Aplicando a transformada de Laplace, tem-se

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right) , \quad (7.16)$$

O diagrama de blocos de um controle proporcional integral de uma planta cuja função de transferência vale  $G(s)$  é apresentado na Figura 7.21(a). A Figura 7.21(b) mostra uma simplificação do controle do diagrama anterior. A função de transferência do sistema controlado fica

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p (1 + T_i s) G(s)}{T_i s + K_p (1 + T_i s) G(s)} . \quad (7.17)$$

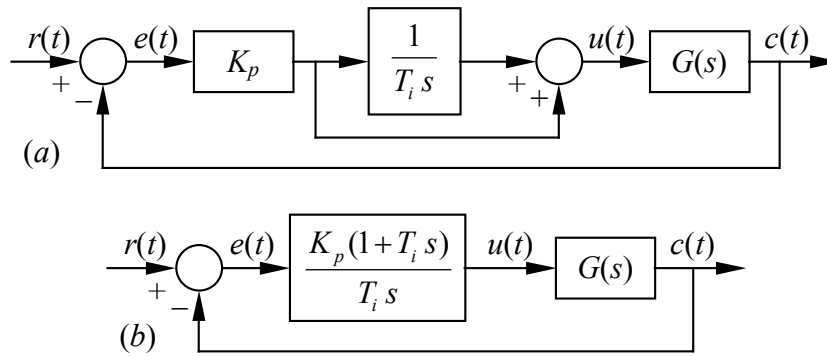


Figura 7.21 – Diagrama de blocos de um sistema com controle proporcional-integral (a) e diagrama simplificado (b).

**Exemplo 7.6** – Aplicar um controlador PI ao problema do exemplo 7.1, considerar que a massa esteja submetida à ação de uma força perturbadora (degrau) de intensidade  $d$  e levar em conta o atrito entre a massa e a superfície. Analisar o erro apresentado pelo controle PI com relação à força perturbadora.

Solução:

Este problema é semelhante ao anterior, porém utiliza um controlador PI ao invés do controlador proporcional. O diagrama de blocos do sistema com o controlador pode ser visto na Figura 7.22. A saída apresentada pelo sistema, em função do erro  $E(s)$  é

$$X(s) = \left[ E(s) K_p \frac{1+T_i s}{T_i s} + D(s) \right] \frac{1}{m s^2 + b s}$$

Fazendo novamente  $R(s) = 0$ , tem-se que  $E(s) = -X(s)$ , e portanto

$$E(s) \left( m s^2 + b s + K_p \frac{1+T_i s}{T_i s} \right) = -D(s)$$

de onde se tira que

$$\frac{E(s)}{D(s)} = - \frac{T_i s}{m T_i s^3 + b T_i s^2 + K_p T_i s + K_p}$$

Se  $d(t)$  é um degrau de intensidade  $d$  unitário, ou seja,  $D(s) = d/s$ , o erro em regime permanente apresentado pelo controlador será

$$e_{rp} = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-s}{m s^3 + b s^2 + K_p s + K_p / T_i} \frac{s}{s} = 0.$$

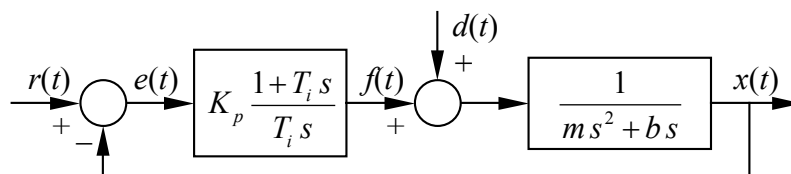


Figura 7.22 – Diagrama de blocos do controlador proporcional-integral do exemplo 7.6.

Isto mostra que o controlador PI consegue eliminar o erro no regime permanente em sistemas sujeitos a uma perturbação, o que o controlador proporcional não conseguia. O motivo disto é que o controle proporcional só consegue gerar uma ação se o erro for diferente de zero, pois a ação é proporcional ao erro. Se o sistema estiver submetido a um esforço externo, o controle proporcional deixa um erro residual tal que sua resposta consiga contrabalançar esta força. Ao se utilizar o controlador PI, contudo, o controlador integral fará esta ação compensatória, deixando para o controle proporcional apenas a eliminação do erro. Nota-se que o controle integral pode ser não nulo mesmo que o erro seja nulo, uma vez que ele é a integral (somatória) dos erros anteriores. Sempre que o erro apresentar uma tendência numa dada direção, o controle integral entra em ação.

### 7.8 Controlador proporcional-integral-derivativo (PID)

O controlador PID é o mais abrangente dos controladores proporcionais, porque engloba as ações proporcional, integral e derivativa. A ação do PID é dada por

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int e(t) dt + K_p T_d \frac{de(t)}{dt}, \quad (7.18)$$

cuja transformada de Laplace fica

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left( 1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right) = K_p \frac{T_d T_i s^2 + T_i s + 1}{T_i s}, \quad (7.19)$$

Na forma de diagrama de blocos o controle PID é mostrado na Figura 7.23, cuja função de transferência do sistema controlado fica dada por

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p (T_d T_i s^2 + T_i s + 1) G(s)}{1 + K_p (T_d T_i s^2 + T_i s + 1) G(s)}. \quad (7.20)$$

Uma das vantagens dos controladores PID é que eles controlam até sistemas naturalmente instáveis, como o pêndulo invertido, mostrado no próximo exemplo.

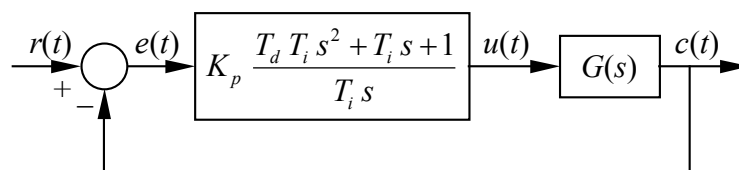


Figura 7.23 – Diagrama de blocos de um sistema com controle proporcional-integral-derivativo.

**Exemplo 7.** – Aplicar um controlador PID ao problema pêndulo invertido, considerando um mancal sem atrito, massa  $m = 1$  kg e comprimento da haste  $l = 1$  m. Adotar a aceleração da gravidade  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>. Considerar os ganhos do controlador iguais a  $K_p = 50$ ,  $T_d = 0.1$  s, e duas situações para o tempo integral:  $T_i = 0.3$  e  $T_i = 0.1$  s. Analisar a resposta do controle sob a ação de um degrau unitário nas duas situações do tempo integral.

Solução:

O comportamento do pêndulo invertido, mostrado na Figura 7.24, já foi analisado na Seção 1.7. A função de transferência do pêndulo invertido mostra que ele possui uma raiz real positiva, e, portanto, o sistema é instável. Se o pêndulo for abandonado num ponto próximo à

vertical, ele irá se afastar da vertical exponencialmente, até inverter. A equação diferencial linearizada do pêndulo invertido fornece

$$u(t) = ml^2 \ddot{\theta} - mgl\theta,$$

onde  $g$  é a aceleração da gravidade. Aplicando a transformada de Laplace, resulta a função de transferência:

$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{1}{ml^2 s^2 - mgl},$$

cujos pólos são  $p_1 = \sqrt{g/l}$  e  $p_2 = -\sqrt{g/l}$ . Como um dos pólos é positivo (ou possui parte real positiva), o sistema apresentado é instável.

Considerando agora que o sistema passe a ser controlado por um PID, então a função de transferência em malha fechada fica

$$\frac{\Theta(s)}{R(s)} = \frac{K_p(T_d T_i s^2 + T_i s + 1) G(s)}{1 + K_p(T_d T_i s^2 + T_i s + 1) G(s)} = \frac{K_p(T_d T_i s^2 + T_i s + 1)}{(ml^2 + K_p T_d T_i) s^2 + K_p T_i s + K_p - mgl}.$$

Para que o sistema controlado seja estável, deve-se garantir que ele apresente os pólos com parte real negativa. A parte real dos pólos é dada por:

$$\text{Re}(p) = -\frac{K_p T_i}{2(ml^2 + K_p T_d T_i)},$$

que é negativa, pois tanto  $K_p$  quanto  $T_i$  e  $T_d$  são positivos. Portanto, o movimento instável do pêndulo tornou-se estável sob a ação de um controle PID. Pode-se, agora, comparar o polinômio característico do pêndulo com o denominador da função de transferência de um sistema do segundo grau, o que irá fornecer os valores da frequência natural e da constante de amortecimento, ou seja

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_p - mgl}{ml^2 + K_p T_d T_i}}$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \frac{K_p T_i}{\sqrt{(ml^2 + K_p T_d T_i)(K_p - mgl)}}.$$

Quando  $T_i = 0.3$  os valores acima resultam:  $\omega_n = 4$  e  $\zeta = 3/4$ . Para  $T_i = 0.1$  tem-se  $\omega_n \approx 5.164$  e  $\zeta \approx 0.3227$ . Portanto, com base nos valores da constante de amortecimento, o sistema é sub-amortecido em ambos os casos. Porém, quando  $T_i = 0.3$  o pêndulo apresenta apenas uma oscilação pois  $\zeta = 0.75 > \sqrt{2}/2$ . A resposta do sistema a uma excitação degrau para  $T_i = 0.3$  fica (ver seção 6.3.1):

$$c(t) = 1 - \frac{4 e^{-3t}}{\sqrt{7}} \text{sen} \left( \sqrt{7} t + \arctan \frac{\sqrt{7}}{3} \right),$$

cujos gráfico é apresentado na Figura 7.25, junto com a resposta para  $T_i = 0.1$ .

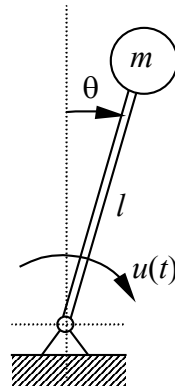


Figura 7.24 – Pêndulo invertido do exemplo 7.6.

Controladores exclusivamente integrais (I), são usados em sistemas de primeira ordem, que não apresentam oscilações, como, por exemplo, o controle de nível de líquido num tanque.

Controladores PID, por sua vez, são utilizados em sistemas sujeitos a perturbações (controle integral), e não naturalmente amortecidos ou com amortecimento insuficiente para os propósitos do controle (controle derivativo). Exemplos de sistemas que utilizam controle PID são navios, aeronaves, mísseis e satélites. O controle PID é também extensivamente utilizado na indústria, para controle de processos (mecânicos, térmicos, hidráulicos, elétricos e eletrônicos).

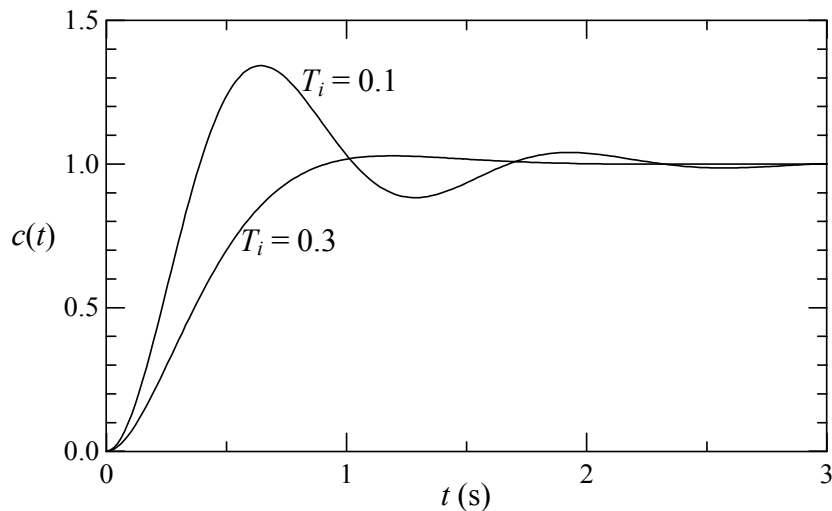


Figura 7.25 – Resposta do controlador PID do pêndulo invertido do exemplo 7.7



### 7.9 Exercícios

- 1) Usa-se um controlador proporcional-integrativo para efetuar o controle de velocidade de um motor elétrico cuja função de transferência em malha aberta vale:

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{I(s)} = \frac{2}{4s+1}$$

na qual  $\Omega(s)$  é a transformada de Laplace da velocidade angular  $\omega(t)$  do motor e  $I(s)$  é a transformada da corrente de armadura  $i(t)$ . Este motor será controlado por um controle PI com ganho proporcional  $K_p$  e tempo integral  $T_i$ . Obter a função de transferência em malha fechada do sistema e o erro em regime permanente, quando  $K_p = 2$  e  $T_i = 1$ .

Resposta:

$$G_{PI}(s) = \frac{\Omega(s)}{R(s)} = \frac{4s+4}{4s^2+5s+4},$$

$$E(s) = R(s)[1 - G_{PI}(s)] = \frac{4s+1}{4s^2+5s+4}, \quad e_{rp} = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = 0$$

- 2) O modelo dinâmico de um forno industrial resulta na seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{T(s)}{Q(s)} = \frac{1}{s+2},$$

onde  $T(s)$  é a transformada de Laplace da temperatura do forno e  $Q(s)$  é a quantidade de calor injetada por unidade de tempo. Deseja-se utilizar um controle PI para dosar a quantidade de calor de forma a controlar a temperatura deste forno. Pede-se:

- A função de transferência em malha fechada do sistema, isto é,  $G_{PI}(s) = T(s)/R(s)$ , em função de  $K_p$  e  $T_i$ .
- Discutir o comportamento da temperatura, com base no cálculo dos pólos do sistema em malha fechada, quando  $K_p = 10$  e  $T_i = 0,1$ .
- Discutir o comportamento da temperatura, com base no cálculo dos pólos do sistema em malha fechada, quando  $K_p = 10$  e  $T_i = 1$ .

Resposta:

$$a) \quad G_{PI}(s) = \frac{T(s)}{R(s)} = \frac{K_p T_i s + K_p}{T_i s^2 + T_i (K_p + 2)s + K_p}$$

- Para  $K_p = 10$  e  $T_i = 0,1$  tem-se dois pólos complexos conjugados:  $p_1 = -6 + 8j$  e  $p_2 = -6 - 8j$ . Logo, o sistema é estável, pois os pólos possuem parte real negativa e o sistema é oscilatório amortecido.
- Para  $K_p = 10$  e  $T_i = 1$  tem-se dois pólos reais:  $p_1 = -11,1$ , e  $p_2 = -0,9$ . Como ambos são negativos, o sistema é estável (assintoticamente), não oscilatório.

- 3) O diagrama de blocos de um sistema de segunda ordem controlado numa malha fechada por um controle PD é mostrado na Figura 7.a.

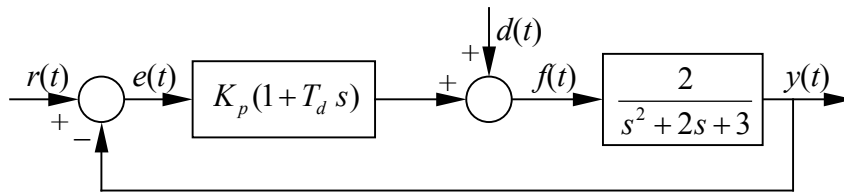


Figura 7.a – Controle PD referente ao exercício 3.

- Obter a função de transferência do controle com relação ao sinal de referência, isto é,  $G_R(s) = Y(s) / R(s)$ , supondo que a perturbação  $d(t)$  seja nula.
- Obter a função de transferência do controle com relação ao sinal de perturbação, isto é,  $G_D(s) = Y(s) / D(s)$ , quando a referência  $r(t)$  for nula.
- Obter os pólos de  $G_R(s)$  e  $G_D(s)$ , quando forem adotados  $T_d = 1$  seg, e  $K_p = 0,5$ .
- Supondo os mesmos valores de  $T_d$  e  $K_p$ , analisar o erro em regime permanente do sistema quando a referência  $r(t)$  for um degrau unitário e a perturbação  $d(t)$  for nula.
- Considerando novamente os mesmos valores de  $T_d$  e  $K_p$ , analisar o erro em regime permanente do sistema quando a referência for nula e houver uma perturbação na forma de um degrau unitário.
- Se  $T_d = 1$  seg, calcular o intervalo de validade de  $K_p$  (dado que  $K_p > 0$ ), de forma a garantir que o sistema apresente dois pólos complexos conjugados.

Respostas:

$$a) \quad G_R(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{2K_p T_d s + 2K_p}{s^2 + 2(K_p T_d + 1)s + 2K_p + 3}$$

$$b) \quad G_D(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{2}{s^2 + 2(K_p T_d + 1)s + 2K_p + 3}$$

$$c) \quad p_1 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} \mathbf{j}, \quad p_2 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2} \mathbf{j}$$

$$d) \quad G_R(s) = \frac{s+1}{s^2 + 3s + 4} \quad e(t) = r(t) - y(t) \quad e_{rp} = \frac{1}{4}$$

$$e) \quad G_D(s) = \frac{2}{s^2 + 3s + 4} \quad e(t) = -y(t) \quad e_{rp} = -\frac{2}{4}$$

$$f) \quad -\sqrt{2} < K_p < \sqrt{2}, \text{ mas como } K_p > 0, \text{ então}$$

$$g) \quad 0 < K_p < \sqrt{2}$$

- 4) Certos sistemas dinâmicos são instáveis, como por exemplo, um pêndulo invertido. Aviões militares de alto desempenho são também instáveis do ponto de vista aerodinâmico. Para estabilizar tais sistemas pode ser utilizado um controlador PD como mostrado no diagrama de blocos da Figura 7.b. Para este sistema pede-se:
- Obter os pólos do sistema em malha aberta ( $G(s) = X(s)/F(s)$ ) e discutir sua estabilidade com base nestes pólos.
  - Obter a função de transferência do sistema em malha fechada, isto é,  $G_{PD}(s) = X(s)/R(s)$ , em função de  $K_p$  e  $T_d$ .
  - Calcular os valores de  $K_p$  e  $T_d$  de tal forma que os pólos do sistema controlado sejam  $-3$  e  $-1$ . O sistema controlado será estável?

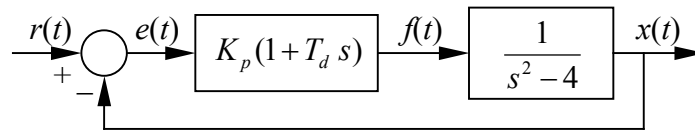


Figura 7.b – Diagrama de blocos com o controlador referente ao exercício 4.

Respostas:

- e) Os pólos são 2 e  $-2$ . Como um dos pólos é positivo, então o sistema é instável.

f) 
$$G_{PD}(s) = \frac{X(s)}{R(s)} = \frac{K_p T_d s + K_p}{s^2 + K_p T_d s + K_p - 4}$$

- g) Um sistema com pólos  $-3$  e  $-1$  tem como polinômio do denominador a forma:  $s^2 + 4s + 3$ . Comparando esta expressão com aquela do sistema controlado, tem-se  $K_p - 4 = 3$ , ou seja  $K_p = 7$ . Além disso,  $K_p T_d = 4$ , de onde  $T_d = 4/7$ .



## BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

BOLTON, W. **Engenharia de controle**. São Paulo: Makron Books do Brasil Editora Ltda., 1995.

CHEN, C. T. **Analog & digital control system design: transfer-function, state-space, and algebraic methods**. Saunders College Publishing, 1993. (ISBN-0-03-094070-2).

DAZZO, J. J.; HOUPIS, C. H. **Análise e projeto de sistemas de controle lineares**. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1984.

DOEBELIN, E. O. **Control system: principles and design**. John Wiley, 1985. (ISBN-13: 978-0471088158).

DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Sistemas de controle modernos**. 8ª edição. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora, 1998. (ISBN 85-216-1242-7).

FRANKLIN, G. F.; POWELL J. D.; EMAMI-NAEINI, A. **Feedback control of dynamic systems**. 4th edition. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2002. (ISBN 0-13-032393-4).

HOUPIS C. H.; LAMONT G. B. **Digital control systems**, MacGraw-Hill, 1985. (ISBN 978-0070305007).

KUO, B. C. **Sistemas de controle automático**. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 1985.

KWAKERNAAK, H.; SIVAN, R. **Linear optimal control systems**. John Wiley & Sons, 1972. (ISBN 0-471-51110—2).

MARTINS DE CARVALHO, J. L. **Sistemas de controle automático**, Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora, 2000.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderna**, 3ª edição. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 1997.

OGATA, K. **State Space Analysis of Controle systems**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1967.

PHILLIPS, C. L.; HARBOR, R. D. **Sistemas de controle e realimentação**, Makron, 1996.

TAKAHASHI, Y.; RABINS, M. J.; AUSLANDER, D. M. **Control and dynamic systems**. Reading: Addison-Wesley, 1970.



## APÊNDICE A

## A-1 Alfabeto Grego

Os símbolos, nomes e pronúncia das letras gregas são apresentados na Tabela A-1.

Tabela A-1 – Símbolos gregos

Símbolo maiúsculo	Símbolo minúsculo	Nome	Pronúncia	Equivalente latino
A	$\alpha$	Alfa	alfa	a
B	$\beta$	Beta	beta	b
X	$\chi$	Chi	qui	c
$\Delta$	$\delta$	Delta	delta	d
E	$\epsilon$	Epsilon	épsilon	e
$\Phi$	$\phi$ ou $\varphi$	Phi	fí	f
$\Gamma$	$\gamma$	Gama	gama	g
H	$\eta$	Eta	éta	ê
I	$\iota$	Iota	ióta	i
K	$\kappa$	Kapa	capa	k
$\Lambda$	$\lambda$	Lambda	lâmbida	l
M	$\mu$	Mu	mi	m
N	$\nu$	Nu	ni	n
O	$\omicron$	Omicron	ômicrom	o
$\Pi$	$\pi$	Pi	pi	p
$\Theta$	$\theta$	Teta	téta	tx
P	$\rho$	Rho	rô	r
$\Sigma$	$\sigma$ ou $\varsigma$	Sigma	sigma	s
T	$\tau$	Tau	tau	t
Y	$\upsilon$	Upsilon	úpsilon	u
$\Omega$	$\omega$ ou $\varpi$	Omega	ômega	ô
$\Xi$	$\xi$	Xi	xi	x
$\Psi$	$\psi$	Psi	psi	ps
Z	$\zeta$	Zeta	zeta	z